MATEMATICA

5° Liceo Scientifico

Pratica

1. Esercizio: calcolare il dominio della seguente funzione:

$y = \sqrt{lg_{\frac{1}{3}}(2-x^2)}$

$lg_{\frac{1}{3}}(2-x^2) \geq 0$

$0 < 2-x^2 \leq 1$

$\begin{cases} 2-x^2 > 0 \\ 2-x^2 \leq 1 \end{cases}$

$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

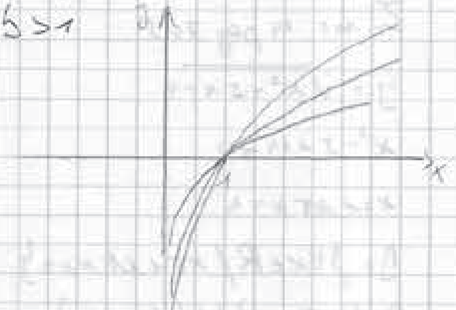
$x \leq -1 \text{ et } x \geq 1$

$y = \sqrt{lg_{\frac{1}{3}}(2-x^2)}$

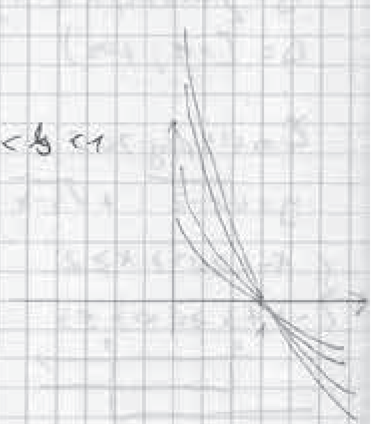
$D = (-\sqrt{2}; -1] \cup [1; \sqrt{2})$

Equazioni logaritmiche:

$y = lg_b\, x$ con $b > 1$



$y = lg_b\, x$ con $0 < b < 1$



Una funzione non iniettiva si può rendere tale mediante una restrizione considerata in una parte del ~~...~~ dominio con il vantaggio che la funzione inversa può essere costruita:

$y = x^2$ | $y = x^2$
$x \in \mathbb{R}^+$ | $x \in \mathbb{R}^-$
$x = +\sqrt{y}$ | $x = -\sqrt{y}$

Ex n: 7 pag 205

$y = \dfrac{x+5}{x^2-5x+4}$

$x^2-5x+4 \neq 0$

$x \neq 1$ et $x \neq 4$

$D = \{\forall x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 1 \text{ et } x \neq 4\}$

$D = (-\infty; 1) \cup (1; 4) \cup (4; +\infty)$

Ex n: 9 pag 205

$y = \sqrt{x+1}$

$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

$D = \{\forall x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq -1\}$

$D = [-1; +\infty)$

Ex n: 13 pag 205

$y = \sqrt{x-2} + \sqrt{3-x}$

$\begin{cases} x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ -x+3 \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \end{cases}$

2 3

$D = \{\forall x \in \mathbb{R} \,/\, 2 \leq x \leq 3\}$

$D = [2; 3]$

Ex n: 16 pag 205

$y = \sqrt{x^3-4x^2+3x}$

$x^3-4x^2+3x \geq 0$

$x(x^2-4x+3) \geq 0$

$x \geq 0$

$x^2-4x+3 \geq 0$

$x = 2 \pm 1 \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$

0 1 3

$D = \{\forall x \in \mathbb{R} \,/\, 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x \geq 3\}$

$D = [0; 1] \cup [3; +\infty)$

Ex n: 8 pag 205

$y = \dfrac{3x+8}{x^2-2x+7}$

$x^2-2x+7 \neq 0$

$\Delta = 4-28$

$D = \{\forall x \in \mathbb{R}\}$

$D = (-\infty; +\infty)$

Ex n: 10 pag 205

$y = \sqrt[3]{x+1}$

$D = \{\forall x \in \mathbb{R}\}$

$D = (-\infty; +\infty)$

Ex n: 14 pag 205

$y = \sqrt{x^2-5x+4}$

$x^2-5x+4 \geq 0$

$x = 1$ et $x = 4$

$D = \{\forall x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq 1 \text{ et } x \geq 4\}$

$D = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$

Ex n: 12 pag 205

$y = \sqrt{\dfrac{x-4}{x+3}}$

$\begin{cases} x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \\ x+3 > 0 \Rightarrow x > -3 \end{cases}$

-3 4

$D = \{\forall x \in \mathbb{R} \,/\, x < -3 \text{ et } x \geq 4\}$

$D = (-\infty; -3) \cup [4; +\infty)$

Es n=21 pg 205

$y = \log_{10}(x^2-5x)$

$x^2-5x>0$

$x(x-5)>0$

$D=\{\forall x \in \mathbb{R}\ x<0 \text{ e/v } x>5\}$

$D\ (-\infty;0) \cup (5;+\infty)$

Es n=22 pg 205

$y=\sqrt{\log_{10}(x^2-8x+8)}$

$\log_{10}(x^2-8x+8) \geq 0$

$x^2-8x+8 \geq 1$

$x^2-8x+7 \geq 0$

$x=1 \text{ e/v } x=7$

$D=\{\forall x \in \mathbb{R} / x \leq 1 \text{ e/v } x \geq 7\}$

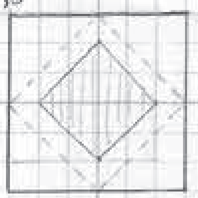
$D=(-\infty;1] \cup [7;+\infty)$

Problema:

dato il quadrato di lato 1 e il quadrato di lato x con i vertici negli assi del primo quadrato, determinare in funzione di x l'intersezione fra i 2 quadrati.

$x>0$

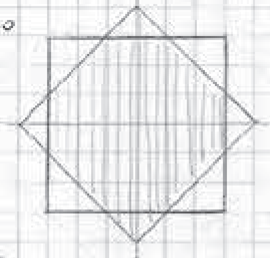
1° caso



$y=x^2$ (l'intersezione fra i due quadrati -y- è data dall'area del quad. di lato x)

$0<x<\frac{1}{2}\sqrt{2}$

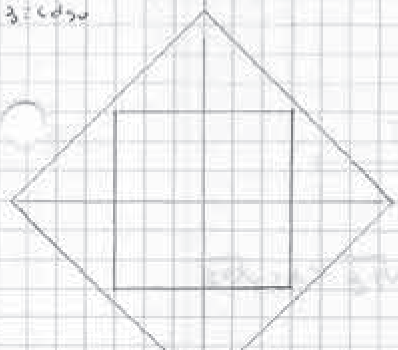
2° caso



$y=-x^2+2\sqrt{2}\,x-1$

$\frac{1}{2}\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

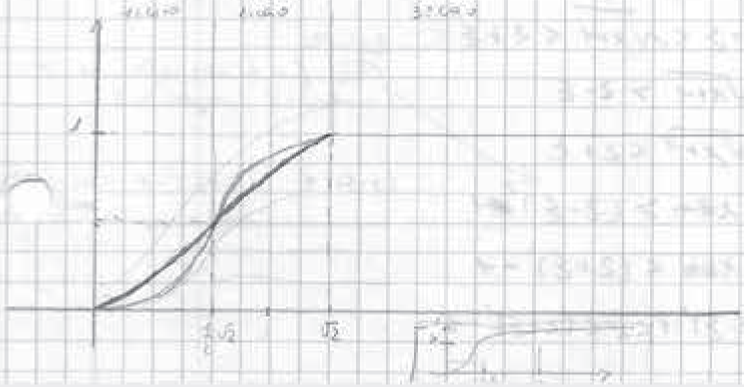
3° caso



$y=1$

$x>\sqrt{2}$

$$f(x)\begin{cases} x^2 & \text{se } 0<x<\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -x^2+2\sqrt{2}\,x-1 & \text{se } \frac{1}{2}\sqrt{2}<x<\sqrt{2} \\ 1 & \text{se } x>\sqrt{2} \end{cases}$$



$D=x\geq 0\ (\mathbb{R}^+)$, $I=[0;1]$

la funzione non è iniettiva perché $y=1$ viene da tutti i numeri maggiori di $\sqrt{2}$.

La funzione è iniettiva se la considero nell'intervallo $[0;\sqrt{2}]$.

__Esercizio__: servendosi della definizione di limite, dimostrare che si ha:

$$\lim_{x \to 3} (2x+1) = 7$$

$\varepsilon > 0$

$7 - \varepsilon < 2x+1 < 7+\varepsilon$ cioè

$$\begin{cases} 2x+1 > 7-\varepsilon \\ 2x+1 < 7+\varepsilon \end{cases}$$

$x > 3 - \frac{1}{2}\varepsilon$

$x < 3 + \frac{1}{2}\varepsilon$

$3 - \frac{1}{2}\varepsilon < x < 3 + \frac{1}{2}\varepsilon$ il che è un intorno di 3. $(\frac{1}{2}\varepsilon = \delta;\ l = 7;\ c = 3)$

$|2x+1-7| < \varepsilon$

__Es n: 1 pag 210__

$$\lim_{x \to 2} (3x+1) = 7$$

$\varepsilon > 0$

$7 - \varepsilon < 3x+1 < 7+\varepsilon$

$$\begin{cases} 3x+1 > 7-\varepsilon \\ 3x+1 < 7+\varepsilon \end{cases}$$

$x > 2 - \frac{1}{3}\varepsilon$

$x < 2 + \frac{1}{3}\varepsilon$

$2 - \frac{1}{3}\varepsilon < x < 2 + \frac{1}{3}\varepsilon$

__Es n: 2 pag 210__

$$\lim_{x \to 3} (x^2+1) = 10$$

$\varepsilon > 0$

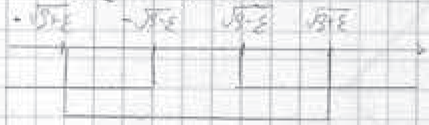
$10 - \varepsilon < x^2+1 < 10+\varepsilon$

$$\begin{cases} x^2+1 > 10-\varepsilon \\ x^2+1 < 10+\varepsilon \end{cases}$$

$x < -\sqrt{9-\varepsilon}$

$x > \sqrt{9-\varepsilon}$

$-\sqrt{9+\varepsilon} < x < \sqrt{9+\varepsilon}$



$-\sqrt{9+\varepsilon} < x < -\sqrt{9-\varepsilon}$ et $\sqrt{9-\varepsilon} < x < \sqrt{9+\varepsilon}$

__Es n: 3 pag 210__

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{x} = 3$$

$\varepsilon > 0$

$\cancel{3}\varepsilon < \sqrt{x} < 3+\varepsilon$

$$\begin{cases} \sqrt{x} > \cancel{3}\varepsilon \\ \sqrt{x} < 3\varepsilon \end{cases}$$

$x > (3+\varepsilon)^2$

$x < (3-\varepsilon)^2$

$(3-\varepsilon)^2 < x < (3+\varepsilon)^2$

__Es n: 4 pag 210__

verificare un limite significa verificare che preso un numero $\varepsilon > 0$ a piacere [illegible]

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{x+1} = 2$$

$(\varepsilon > 0)$

$2 - \varepsilon < \sqrt{x+1} < 2+\varepsilon$ → cioè

ciò fa individuare un intorno completo

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} > 2-\varepsilon \\ \sqrt{x+1} < 2+\varepsilon \end{cases}$$

$x \cancel{+1} > (2-\varepsilon)^2 \cancel{+1}$

$x \cancel{+1} < (2+\varepsilon)^2 - 1$

$(2-\varepsilon)^2 - 1 < x < (2+\varepsilon)^2 - 1$

3 Es n: 5 pag

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x+6}=2$$

$\varepsilon>0$

$$2-\varepsilon<\sqrt[3]{x+6}<2+\varepsilon$$

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x+6}>2-\varepsilon\\ \sqrt[3]{x+6}<2+\varepsilon\end{cases}$$

$$x>(2-\varepsilon)^3-6$$

$$x<(2+\varepsilon)^3-6$$

$(2-\varepsilon)^3-6$ $\quad$ $(2+\varepsilon)^3-6$

$$(2-\varepsilon)^3-6<x<(2+\varepsilon)^3-6$$

Es n: 6 pag 210

$$\lim_{x\to -1}(x^3+5)=4$$

$\varepsilon>0$

$$4-\varepsilon<x^3+5<4+\varepsilon$$

$$\begin{cases}x^3+5>4-\varepsilon\\ x^3+5<4+\varepsilon\end{cases}$$

Es n: 7 pag 210

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}=5$$

$\varepsilon>0$

$$5-\varepsilon<\frac{x^2+3x-4}{x-1}<5+\varepsilon$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}>5-\varepsilon\\[2ex] \dfrac{x^2+3x-4}{x-1}<5+\varepsilon\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}>\dfrac{(5-\varepsilon)(x-1)}{x-1}\\[2ex] \dfrac{x^2+3x-4}{x-1}<\dfrac{(5+\varepsilon)(x-1)}{x-1}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-4-5x+5+\varepsilon x-\varepsilon}{x-1}>0\\[2ex] \dfrac{x^2+3x-4-5x+5-\varepsilon x+\varepsilon}{x-1}<0\end{cases}$$

~~$x^2-2x-\varepsilon x+1+\varepsilon > 0$~~

~~Es n: 8 pag 210~~

~~$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x-3}=7$~~

$$\begin{cases}(1)\ \dfrac{x^2-2x+\varepsilon x+1-\varepsilon}{x-1}>0\\[2ex] (2)\ \dfrac{x^2-2x-\varepsilon x+1+\varepsilon}{x-1}<0\end{cases}$$

$$x=\frac{2-\varepsilon\pm\sqrt{(2-\varepsilon)^2-4+4\varepsilon}}{2}=\frac{2-\varepsilon\pm\sqrt{\varepsilon^2}}{2}=\frac{2-\varepsilon\pm\varepsilon}{2}\begin{cases}1-\varepsilon\\ 1\end{cases}$$

$$x=\frac{2+\varepsilon\pm\sqrt{(2+\varepsilon)^2-4-4\varepsilon}}{2}=\frac{2+\varepsilon\pm\varepsilon}{2}\begin{cases}1\\ 1+\varepsilon\end{cases}$$

(1)∩(2)

N>0 per $x<1-\varepsilon$ e $x>1$

D>0 per $x>1$

$\frac{N}{D} > 0$ per $x > 1-\varepsilon$

Dalla (2):

$N > 0$ per $x < 1$ et $x > 1+\varepsilon$

$D > 0$ per $x > 1$

$\frac{N}{D} < 0$ per

$\frac{N}{D}$ per $x < 1+\varepsilon$

(1)

$1-\varepsilon < x < 1+\varepsilon$

Com: pag 210

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-5x-3}{x-3} = 7$$

$\varepsilon > 0$

$$7-\varepsilon < \frac{2x^2-5x-3}{x-3} < 7+\varepsilon$$

$$\begin{cases} \frac{2x^2-5x-3}{x-3} > 7-\varepsilon \\ \frac{2x^2-5x-3}{x-3} < 7+\varepsilon \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2x^2-5x-3-7x+\varepsilon x+21-3\varepsilon}{x-3} > 0 \\ \frac{2x^2-5x-3-7x-\varepsilon x+21+3\varepsilon}{x-3} < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2x^2-12x+\varepsilon x+18-3\varepsilon}{x-3} > 0 \\ \frac{2x^2-12x-\varepsilon x+18+3\varepsilon}{x-3} < 0 \end{cases}$$

$$\frac{2x^2-(12-\varepsilon)x+18-3\varepsilon}{x-3} > 0$$

$N > 0$ per $2x^2-(12-\varepsilon)x+18-3\varepsilon > 0$

$$x = \frac{12-\varepsilon \pm \sqrt{(12-\varepsilon)^2-144+24\varepsilon}}{4} = \frac{12-\varepsilon \pm \varepsilon}{4} < \begin{matrix} \frac{6-\varepsilon}{2} = 3-\frac{1}{2}\varepsilon \\ 3 \end{matrix}$$

$N > 0$ per $x < 3-\frac{1}{2}\varepsilon$ et $x > 3$ $\qquad$ $D > 0$ per $x > 3$

$\frac{N}{D} > 0$ per $x > 3-\frac{1}{2}\varepsilon$

$$\frac{2x^2-12x-\varepsilon x+18+3\varepsilon}{x-3} < 0$$

$N > 0$ per $2x^2-12x-\varepsilon x+18+3\varepsilon > 0$

$$x = \frac{12+\varepsilon \pm \sqrt{(12+\varepsilon)^2-144-24\varepsilon}}{4} = \frac{12+\varepsilon \pm \varepsilon}{4} < \begin{matrix} 3 \\ 3+\frac{1}{2}\varepsilon \end{matrix}$$

$N > 0$ per $x < 3$ et $x > 3+\frac{1}{2}\varepsilon$

$D > 0$ per $x > 3$

$4\ \frac{N}{D} < 0$ per $x < 3 + \frac{7}{2}\varepsilon$

$3 - \frac{1}{2}\varepsilon < x < 3 + \frac{7}{2}\varepsilon$

Es n = 4 pag 710

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{x+1} = 2$$

Verificare questo limite significa per vedere che fissato un numero ε maggiore di zero e studiamo il sistema:

$$2 - \varepsilon < \sqrt{x+1} < 2 + \varepsilon \quad \text{cioè}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} > 2 - \varepsilon & (1) \\ \sqrt{x+1} < 2 + \varepsilon & (2) \end{cases}$$

ha fra le sue soluzioni un intorno completo di 3.

1) se $2 - \varepsilon < 0 \Rightarrow \varepsilon > 2$ la (1) è soddisfatta per $x \geq -1$

Entrambi i membri della (2) sono positivi e pino quindi elevarli al quadrato:

$$x + 1 < 4 + 4\varepsilon + \varepsilon^2$$

$$x < \varepsilon^2 + 4\varepsilon + 3$$

$-1 < x < 3 + 4\varepsilon + \varepsilon^2$ il che è un intorno di 3

2) se è $2 - \varepsilon > 0 \Rightarrow \varepsilon < 2$ allora entrambi i membri della (1) sono positivi e posso quindi elevarli al quadrato

$$x + 1 > 4 - 4\varepsilon + \varepsilon^2$$

$$x > 3 - 4\varepsilon + \varepsilon^2$$

Entrambi i membri della (2) sono positivi e posso elevarli al quadrato con la condizione $x+1>0 \Rightarrow x>-1$

$$x + 1 < 4 + 4\varepsilon + \varepsilon^2$$

$$x < 3 + 4\varepsilon + \varepsilon^2$$

$3 + 4\varepsilon + \varepsilon^2$ è sicuramente maggiore di 3. Vediamo quando è minore di 3 Poichè $3 - 4\varepsilon + \varepsilon^2$:

$$3 - 4\varepsilon + \varepsilon^2 < 3$$

$$\varepsilon^2 - 4\varepsilon < 0 \Rightarrow 0 < \varepsilon < 4$$

ε è sicuramente compreso tra 0 e 4 perché la condizione iniziale era di $\varepsilon < 2$

Esercizio: verificare il seguente limite

$$\lim_{x \to 2} (x^2+1) = 5$$

Verificare questo limite significa far vedere che preso un numero ε positivo e arbitrario il sistema:

$5-\varepsilon < x^2+1 < 5+\varepsilon$, cioè

$$\begin{cases} x^2+1 > 5-\varepsilon & (1) \\ x^2+1 < 5+\varepsilon & (2) \end{cases}$$

ha per le sue soluzioni un intorno completo di 2:

$x^2 > 4-\varepsilon$ (1)

(1) per $\varepsilon > 4$ ($4-\varepsilon<0$) la disequazione è soddisfatta per ogni x

(2) $x^2 < 4+\varepsilon \Rightarrow -\sqrt{4+\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}$

e il limite è verificato per $\varepsilon > 4$

(2) per $\varepsilon < 4$ (e maggiore di 0) $4-\varepsilon$ è positivo

$x^2 > 4-\varepsilon$ (1)

$x < -\sqrt{4-\varepsilon}$ e/o $x > \sqrt{4-\varepsilon}$

$x^2 < 4+\varepsilon$ (2)

$-\sqrt{4+\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}$

$\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}$

Es n.3 pag 710

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2+x-6}{x+3} = -5$$

Verificare questo limite si significa vedere che fissato un numero ε positivo e arbitrario risolviamo:

$$-5-\varepsilon < \frac{x^2+x-6}{x+3} < -5+\varepsilon \qquad \text{cioè}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+x-6}{x+3} > -5-\varepsilon \\[2ex] \dfrac{x^2+x-6}{x+3} < -5+\varepsilon \end{cases}$$

ho per le mie soluzioni un intorno completo di -3.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+x-6+5x+\varepsilon x+15+3\varepsilon}{x+3} > 0 \\[2ex] \dfrac{x^2+x-6+5x-\varepsilon x+15-3\varepsilon}{x+3} < 0 \end{cases}$$

$$\frac{x^2+x-6+5x+\varepsilon x+15+3\varepsilon}{x+3} > 0$$

$N>0$ per $x^2+(6+\varepsilon)x+9+3\varepsilon > 0$

$$x = \frac{-6-\varepsilon \pm \sqrt{(6+\varepsilon)^2-36-12\varepsilon}}{2} = \frac{-6-\varepsilon\pm\varepsilon}{2} \begin{cases} -3-\varepsilon \\ -3 \end{cases}$$

$N>0$ per $x<-3-\varepsilon$ et $x>-3$

$D>0$ per $x+3>0$ per $x>-3$

$\frac{N}{D}>0$ per $x>-3-\varepsilon$

$-3-\varepsilon \qquad -3$

$$\frac{x^2+6x-\varepsilon x+9-3\varepsilon}{x+3} < 0$$

$N>0$ per $x^2-(\varepsilon-6)x+9-3\varepsilon > 0$

$$x = \frac{\varepsilon-6 \pm \sqrt{(\varepsilon-6)^2-36+12\varepsilon}}{2} = \frac{\varepsilon-6\pm\varepsilon}{2} \begin{cases} -3 \\ \varepsilon-3 \end{cases}$$

$N>0$ per $x<-3$ et $x>\varepsilon-3$

$D>0$ per $x+3>0$ per $x>-3$

$\frac{N}{D}<0$ per $x<\varepsilon-3$

$-3 \qquad \varepsilon-3$

$-\varepsilon-3 \qquad \varepsilon-3$

$$-\varepsilon-3 < x < \varepsilon-3$$

Es n: 13 pag 210

$$\lim_{x \to 2} \lg_{10} x = \lg_{10} 2$$

Verificare questo limite significa far vedere che preso un numero ε arbitrario esistente il sistema:

$$\lg_{10} 2 - \varepsilon < \lg_{10} x < \lg_{10} 2 + \varepsilon \quad \text{cioè}$$

$$\begin{cases} \lg_{10} x > \lg_{10} 2 - \varepsilon \\ \lg_{10} x < \lg_{10} 2 + \varepsilon \end{cases}$$

ha fra le sue soluzioni un intorno completo di 2.

$\lg_{10} x > \lg_{10} 2 - \varepsilon$ per $x > 2 - \varepsilon$

$\lg_{10} x < \lg_{10} 2 + \varepsilon$ per $x < 2 + \varepsilon$

$2 - \varepsilon < x < 2 + \varepsilon$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists k : \forall x > k$

$$0 - \varepsilon < \frac{1}{x} < 0 + \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{1}{x} < +\varepsilon$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} > -\varepsilon \\ \frac{1}{x} < \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{\varepsilon x}{x} > 0 \\ \frac{1}{x} - \frac{\varepsilon x}{x} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1 + \varepsilon x}{x} > 0 \\ \frac{1 - \varepsilon x}{x} < 0 \end{cases}$$

posso ridurre a forma intera

$$\begin{cases} x > \frac{1}{\varepsilon} \\ x > \frac{1}{\varepsilon} \end{cases}$$

$x > \frac{1}{\varepsilon}$

Esercizio n: 20 pag 711

$$\lim_{x\to -1} \frac{x}{(x+1)^2} = -\infty \qquad \lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

Verificare questo limite significa vedere se fissato un numero k esistono fra le soluzioni di questa disequazione c'è un intorno di meno 1.

$$\frac{x}{(x+1)^2} < k$$

poiché $(x+1)^2 \neq 0$ posso ridurre a forma intera

$$x < k(x+1)^2$$

$$kx^2 + (2k-1)x + k > 0$$

$$x = \frac{1-2k \pm \sqrt{-4k+1}}{2k}$$

$$\Delta = -4k+1 \geq 0 \text{ per } k \leq \frac{1}{4}$$

Poiché sicuramente k è minore di zero, esso è anche quindi minore di un quarto, quindi la disequazione ha le sue radici x_1 e x_2 e $kx^2+(2k-1)x+k>0$ per valori esterni all'intervallo delle radici

Dobbiamo ora vedere se queste radici formano un intorno di -1:

$$\begin{cases} f(-1) = -k+2k+1-k = +1 > 0 \\ k<0 \end{cases} \Rightarrow \text{"}-1\text{" è interno all'intervallo delle radici}$$

Es n: 18 pag 711

$$\lim_{x\to 1} \frac{2}{(x-1)^2} = +\infty \qquad \lim_{x\to c} f(x) = +\infty$$

Verificare questo limite significa vedere se, fissato un numero k arbitrario, fra le soluzioni della disequazione

$$\frac{2}{(x-1)^2} > k$$

c'è un intorno di 1.

$$2 > kx^2 - 2kx + k$$

$$kx^2 - 2(k+1)x + k < 0 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{4}\Delta = (k+1)^2 - k^2 = 2k+1 > 0 \text{ per } k > -\frac{1}{2}$$

Poiché sicuramente k è positivo allora è maggiore di $-\frac{1}{2}$ e quindi la disequazione ha soluzioni reali e distinte e la (1) è valida nell'intervallo interno delle radici

$$\begin{cases} f(1) = k-2k-2+k = -2 < 0 \\ k>0 \end{cases} \Rightarrow \text{"}2\text{" è interno all'intervallo delle radici}$$

Es n: 19 pag 211

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x-5}{x^2} = -\infty$$

Verificare questo limite significa vedere se fissato un numero K arbitrario, fra le soluzioni della disequazione

$$\frac{2x-5}{x^2} < K$$

c'è un intorno di 0.

$$2x-5 < Kx^2$$

$$Kx^2 - 2x + 5 > 0$$

$$\Delta = 1 - 5K > 0 \text{ per } K < \frac{1}{5}$$

Poiché sicuramente K è negativo allora è anche minore di $\frac{1}{5}$ quindi la disequazione ha due radici x_1 e x_2. Inoltre essendo K negativo, la disequazione è risolta nell'intervallo interno alle radici

$$\begin{cases} f(0) = 5 > 0 \\ K < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{"0" è interno all'intervallo delle radici}$$

Es n: 26 pag 211

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{1 + \frac{4}{x}} = 1$$

Verificare questo limite significa per vedere se, fissato un numero ε arbitrario, l'intorno

$$1 - \varepsilon < \sqrt{1 + \frac{4}{x}} < 1 + \varepsilon$$

ha fra le sue soluzioni un intorno di ∞.

$$\begin{cases} \sqrt{1 + \frac{4}{x}} > 1 - \varepsilon & (1) \\ \sqrt{1 + \frac{4}{x}} < 1 + \varepsilon \end{cases}$$

1) se è $1 - \varepsilon < 0 \Rightarrow \varepsilon > 1$ allora la (1) è risolta per $1 + \frac{4}{x} > 0$

$$1 + \frac{4}{x} > 0$$

$$\frac{4+x}{x} > 0$$

$x + 4 > 0$ per $x > -4$

$x > 0$

$x < -4$ et $x > 0$

La (2) ha il secondo membro positivo posso quindi elevare entrambi i membri al quadrato:

$$1 + \frac{4}{x} < (1 + \varepsilon)^2$$

$$1 + \frac{4}{x} < 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2$$

$$\frac{\varepsilon^2 x + 2\varepsilon x - 4}{x} > 0$$

7 $\varepsilon^2 x + 2\varepsilon x - 4 > 0$ per

$(\varepsilon^2 + 2\varepsilon)x - 4 > 0$ per $x > \dfrac{4}{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}$

$x > 0$

$x < 0$ et $x > \dfrac{4}{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}$

$x < -4$ et $x > \dfrac{4}{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}$

2) se è $1 - \varepsilon > 0 \Rightarrow \varepsilon < 1$ allora posso elevare entrambi i membri della (1) al quadrato:

$\cancel{1} + \dfrac{4}{x} > \cancel{1} - 2\varepsilon + \varepsilon^2$

$\dfrac{\varepsilon^2 x - 2\varepsilon x - 4}{x} < 0$

$\varepsilon^2 x - 2\varepsilon x - 4 < 0$ per $(\varepsilon^2 - 2\varepsilon)x - 4 < 0$ per $x < \dfrac{4}{\varepsilon^2 - 2\varepsilon}$

$0 < \varepsilon < 1$ $x > 0$

$x < \dfrac{4}{\varepsilon^2 - 2\varepsilon}$ et $x > 0$

$\varepsilon < 0$

$0 < x < \dfrac{4}{\varepsilon^2 - 2\varepsilon}$

$\emptyset$

$x < \dfrac{4}{\varepsilon^2 - 2\varepsilon}$ et $x > \dfrac{4}{\varepsilon^2 + 2\varepsilon}$

[illegible]

$\cancel{\lim_{x \to -\infty} \sqrt[5]{2-x} = +\infty}$

$\cancel{\sqrt[5]{2-x} > k}$

$\cancel{2-x > k^5}$

$\cancel{x < 2-k^5}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \to 0} \sin x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 0 \cdot 1 = 0$$

8

Es n: 31 pag 211. Servendosi dei teoremi sui limiti, dimostrare che

$$\lim_{x\to 2} (x^3-2x+5) = 9$$

$$f(2) = 8-4+5 = 9$$

quindi il limite di x^3-2x+5 per x che tende a 2 è 9.

Es n: 33 pag 211

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+5}{2x-3} = -\frac{5}{3}$$

$$f(0) = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$$

Es n: 32-34-35-36-37-38-39-40 pag 211

$$\lim_{x\to 4} (2x+\sqrt{x}-1) = 9$$

$$f(4) = 8+2-1 = 9$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+7}}{2x} = \frac{3}{4}$$

$$f(2) = \frac{\sqrt{9}}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right) = \frac{3}{4}$$

$$f(0) = \frac{0-0+1}{-4}+1 = -\frac{1}{4}+1 = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos x} = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{3}\pi}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = 1$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x-6}{5x} = 0$$

$$f(3) = \frac{6-6}{15} = 0$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+5}{x^2-3} = 9$$

$$f(2) = \frac{4+5}{4-3} = 9$$

$$\lim_{x\to \sqrt{3}} \frac{x^2-3}{x^4+x^2+1} = 0$$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{3-3}{9+3+1} = 0$$

$$\lim_{x\to 3} (\sqrt{x+6} - \sqrt{1+x}) = 1$$

$$f(3) = 3-2 = 1.$$

Es n: 176 pag 719 Servendosi dei teoremi enunciati sui limiti, del limite fondamentale $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$, e ricordando, infine, la continuità delle funzioni elementari, dimostrare che si ha:

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}5x}{x}=5$$

$$\lim_{x\to0}\frac{5\operatorname{sen}5x}{5x}=5\cdot\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}5x}{5x}=5\cdot1=5$$

Es n: 177 pag 719

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}2x}{x}=2$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2\operatorname{sen}2x}{2x}=2\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}2x}{2x}=2\cdot1=2$$

Es n: 178 pag 719

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}^2x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}=$$

$$1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Es n: 179 pag 719

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to0}-\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to0}-\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}-\frac{\operatorname{sen}^2x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}-\frac{\operatorname{sen}x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\operatorname{sen}x\cdot\lim\frac{1}{1+\cos x}=-1\cdot0\cdot\frac{1}{2}=0$$

Es n: 180 pag 719

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}5x}{\operatorname{sen}2x}=\frac{5}{2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{5x\operatorname{sen}5x}{5x}}{\frac{2x\operatorname{sen}2x}{2x}}=\lim_{x\to0}\frac{5\frac{\operatorname{sen}5x}{5x}}{2\frac{\operatorname{sen}2x}{2x}}=\frac{5}{2}\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}5x}{5x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{2x}{\operatorname{sen}2x}=\frac{5}{2}\cdot1\cdot1=\frac{5}{2}$$

Es n: 181 pag 719

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\operatorname{sen}\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$$

$$\cancel{\lim_{x\to0}\frac{\alpha\beta\operatorname{sen}\alpha x}{\alpha\beta\operatorname{sen}\beta x}=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\alpha}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\beta}{\operatorname{sen}\beta x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\alpha}{\beta}=1\cdot1\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}}$$

Es n: 182 pag 720

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg\,x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{sen\,x}{cos\,x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\,x}{x \cdot cos\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\,x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{cos\,x} = 1 \cdot 1 = 1$$

Es n: 183 pag 720

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg\,2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{sen\,2x}{cos\,2x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\,2x}{x\cos 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,sen\,2x}{2x\cos 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\,2x}{2x} \cdot \lim_{x\to 0} 2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 2x} = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$$

Es n: 184 pag 720

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg\,x}{7x} = \frac{1}{7}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{sen\,x}{cos\,x}}{7x} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\,x}{7x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\,x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{7} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{1}{7}$$

Es n: 185 pag 720

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{sen^2 x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{sen\,x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{sen\,x} = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

Es n: 186 pag 720

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\,x + x}{x} = 2$$

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{sen\,x}{x} + 1\right] = \lim_{x\to 0} \frac{sen\,x}{x} + \lim_{x\to 0} 1 = 1 + 1 = 2$$

Es n: 187 pag 720

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\,2x}{tg\,x} = 2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,sen\,x\cos x}{\frac{sen\,x}{cos\,x}} = \lim_{x\to 0} 2\cos^2 x = \lim_{x\to 0} 2 \cdot \lim_{x\to 0} \cos x \cdot \lim_{x\to 0} \cos x = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

Es n: 188 pag 720

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\,x}{tg\,x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\,x \cos x}{sen\,x} = \lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

Es n = 183 pag 720

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{ctg} x = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \lim_{x\to 0} \cancel{x \cos x} \frac{x \cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot \lim_{x\to 0} \cos x = 1 \cdot 1 = 1$$

Es n = 190 pag 720

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{tg} x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \cos x = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \lim_{x\to 0} \cos x = 0 \cdot 1 = 0.$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x-2}{2} \cdot \cos \frac{x+2}{2}}{2 \cdot \frac{1}{2}\, x-2} = \lim_{x-2\to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{x-2}{2}}{\frac{x-2}{2}} \cdot \lim_{x\to 2} \cos \frac{x+2}{2} = 1 \cdot \cos 2 = \cos 2$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

10 <u>Determinare il dominio delle funzioni date</u> (pg 107)

a) $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-2}$

$x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$

$x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$

$D = x > 0$

b) $y = \frac{3-x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$3-x^2 \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$

$1-x^2 > 0 \Rightarrow -1 < x < 1$

$D = -1 < x < 1$

c) $y = \sqrt{x^2-25} - \sqrt{49-x^2}$

$\sqrt{x^2-25} \geq 0 \Rightarrow x < -5 \text{ et } x > 5$

$\sqrt{49-x^2} \geq 0 \Rightarrow -7 < x < 7$

$D = -7 < x < -5 \text{ et } 5 < x < 7$

d) $y = \frac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{25-x^2}}$

$\sqrt{x^2-9} \geq 0 \Rightarrow x < -3 \text{ et } x > 3$

$\sqrt{25-x^2} > 0 \Rightarrow -5 < x < 5$

$D = -3 < x < 3$

<u>Dimostrare i limiti dati:</u>

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

Verificare questo limite significa far vedere se, fissato un numero ε positivo, il sistema

$$-\varepsilon < \frac{1}{x} < \varepsilon$$

è soddisfatto per $x > N$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} > -\varepsilon \\ \frac{1}{x} < \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\varepsilon x < 0 \Rightarrow x > 0 \\ \varepsilon x > 0 \Rightarrow x > 0 \end{cases}$$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-2}{x} = +\infty$

$K > 0 \Rightarrow$

$\frac{x^2-2}{x} > K$

$x^2 - Kx - 2 > 0$

$x = \frac{K \pm \sqrt{K^2+8}}{2}$

Compito di Matematica del 26.10.1985 FILA 1:

1) Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

a) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$

b) $y = \lg \frac{x^2 - 9}{x - 1}$

c) $y = \sqrt{\lg_{3}(x-5)}$

d) $y = \frac{5}{4 - x + \sqrt{x-2}}$

2) Verificare il seguente limite:

$\lim_{x \to 4} (2x - 3) = 5$

3) Dimostrare che la funzione:

$f(x) = 3x + 1$

è continua nel punto $x = 2$

4) Calcolare:

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{6x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{2x - \operatorname{sen} x}{3x + \operatorname{sen} x}$

---

1)

a) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$

$x^2 - 6x + 5 \geq 0$

$x = 3 \pm \sqrt{9 - 5} = 3 \pm 2 < \begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix}$

$x \leq 1$ et $x \geq 5$

$D = \{ \exists\, \forall x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq 1 \text{ et } x \geq 5 \}$

b) $y = \lg \frac{x^2 - 9}{x - 1}$

$\frac{x^2 - 9}{x - 1} > 0$

$N = x^2 - 9 > 0$ per $x < -3$ et $x > 3$

$D = x - 1 > 0$ per $x > 1$

$\frac{N}{D} > 0$ per $-3 < x < 1$ et $x > 3$

$-3 \quad 1 \quad 3$

$D = \{ \exists\, \forall x \in \mathbb{R} \,/\, x > 3 \text{ et } -3 < x < 1 \}$

c) $y = \sqrt{\lg_{3}(x-5)}$

$\lg_{3}(x - 5) \geq 0$

$x - 5 \geq 1$

$x > 5$

$D = \{ \exists\, \forall x \in \mathbb{R} \,/\, x > 5 \}$

d) $y = \frac{5}{4 - x + \sqrt{x-2}}$

$4 - x + \sqrt{x-2} \neq 0$

$\begin{cases} \sqrt{x-2} = x - 4 \\ x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \end{cases}$

$x - 2 = x^2 - 8x + 16$

$x^2 - 9x + 18 = 0$

$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2} < \begin{matrix} 3 \\ 6 \end{matrix}$

$D = \{ \exists\, \forall x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 6 \text{ con } x \geq 2 \}$

$D = [2, 6) \cup (6, +\infty)$

N°2) $\lim_{x\to 4} (2x-3) = 5$

Verifico se questo limite significa per vedere che, preso un numero ε positivo e arbitrario il sistema

$$5-\varepsilon < 2x-3 < 5+\varepsilon$$

ha fra le sue soluzioni un intorno di 4

$$\begin{cases} 2x-3 > 5-\varepsilon \\ 2x-3 < 5+\varepsilon \end{cases}$$

$x > 4 - \frac{1}{2}\varepsilon$

$x < 4 + \frac{1}{2}\varepsilon$

$4-\frac{1}{2}\varepsilon < x < 4+\frac{1}{2}\varepsilon$

il che è un intorno di 4.

3) Ip $f(x) = 3x+1$

Th $\lim_{x\to 2} (3x+1) = f(2) = 7$

$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists I_c$:

$7-\varepsilon < 3x+1 < 7+\varepsilon$

$$\begin{cases} 3x+1 > 7-\varepsilon \\ 3x+1 < 7+\varepsilon \end{cases}$$

$x > 2 - \frac{1}{3}\varepsilon$

$x < 2 + \frac{1}{3}\varepsilon$

$2-\frac{1}{3}\varepsilon < x < 2+\frac{1}{3}\varepsilon$

il che è un intorno di 2

4) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\frac{\sin 3x}{3x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin x}{3x+\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{x} - \frac{\sin x}{x}}{\frac{3x}{x}+\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2-\frac{\sin x}{x}}{3+\frac{\sin x}{x}} = \frac{2-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}{3+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = \frac{2-1}{3+1} = \frac{1}{4}$$

Dimostrazione della continuità della funzione di coseno:

Ip: $f(x) = \cos x$

Ts: $\lim_{x \to c} \cos x = \cos c$

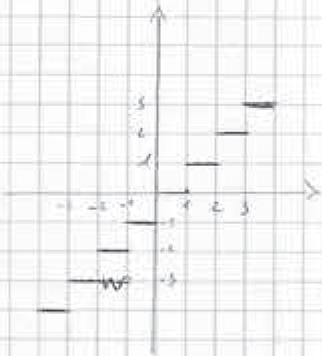
pongo $x = h + c$

$$\lim_{h \to 0} \cos(h+c) = \lim_{h \to 0} \cos h \cos c - \underbrace{\sin h}_{\to 0} \sin c = \cos c \cdot 1 - 0 = \cos c$$

Funzione di estrazione di massimo intero:

$f(x) = [x]$

x	$f(x)$
0	0
1	1
1,5	1
1,73	1
1,93	1
2	2
2,95	2
-0,5	-1
-1,7	-2



$\lim_{x \to 2^-} [x] = 1$

$\lim_{x \to 2^+} [x] = 2$

La funzione ha nei punti 1, 2, 3, 4, una discontinuità di prima specie perché il limite destro è diverso dal limite sinistro.

Es n: 1 pag 733

$f(x) = 3x^2 + 1$

$x = 2$

x	y
2	13
$2+h$	$3(2+h)^2+1$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{3(2+h)^2+1-13}{h} = \frac{\cancel{12}+12h+3h^2+\cancel{1}-\cancel{13}}{h} = 3h + 12$$

$$D_{x=2} = \lim_{h \to 0} (3h + 12) = 12$$

Es n: 2 pag 733

$f(x) = x^3 - 7x - 1$

$x = 1$

x	y
1	-7
$1+h$	$(1+h)^3 - 7(1+h) - 1$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{(1+h)^3 - 7(1+h) - 1 + 7}{h} = \frac{\cancel{1}+3h+3h^2+h^3-\cancel{7}-7h-\cancel{1}+\cancel{7}}{h} = \frac{h^3+3h^2-4h}{h} = h^2+3h-4$$

$$D_{x=1} = \lim_{h \to 0} (h^2 + 3h - 4) = -4$$

Es n:3 pag 733

$f(x) = \frac{2x+1}{5}$

$x = -1$

x	y
-1	$-\frac{1}{5}$
$-1+h$	$\frac{-2+1+2h}{5}$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{2h-1}{5} + \frac{1}{5}}{h} = \frac{\frac{2}{5}h}{h} = \frac{2}{5}$$

$D = \frac{2}{5}$

Es n:4 pag 733

$f(x) = -x^2+3x-2$

$x = \frac{1}{2}$

x	y
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}+h$	$(\frac{1}{2}+h)^2+3(\frac{1}{2}+h)-2$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{(\frac{1}{2}+h)^2+3(\frac{1}{2}+h)-2+\frac{1}{4}}{h} = \frac{\cancel{\frac{1}{4}}+h+h^2+\frac{3}{2}+3h-\cancel{2}+\cancel{\frac{1}{4}}}{h} = h+4$$

$$D_{x=\frac{1}{2}} = \lim_{h\to 0}(h+4) = 4$$

Es n:5 pag 733

$f(x) = \frac{x}{x+2}$ in $x=-3$

$x = -3$

x	y
-3	3
$-3+h$	$\frac{-3+h}{h-1}$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{h-3}{h-1} - 3}{h} = \frac{\frac{h-3-3h+3}{h-1}}{h} = \frac{\frac{-2h}{h-1}}{h} = -\frac{2}{h-1}$$

$$R_3 = \frac{\frac{h-3}{h-1} - 3}{h} = \frac{h-3-3h+3}{h-1} \cdot \frac{1}{h} = \frac{-2h}{h-1} \cdot \frac{1}{h} = -\frac{2}{h-1}$$

$$D_{x=-3} = \lim_{h\to 0}\left(-\frac{2}{h-1}\right) = 2$$

Es n: 6 pag 733

$f(x) = \frac{x-2}{x^2}$

$x = -2$

x	y
-2	-1
$(-2+h)$	$\frac{-4+h}{(h-2)^2}$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{h-4}{(h-2)^2}+1}{h} = \frac{\frac{h-4+h^2-4h+4}{(h-2)^2}}{h} = \frac{\frac{h^2-3h}{(h-2)^2}}{h} = \frac{h-3}{(h-2)^2}$$

$$D_{x=-2} = \lim_{h\to 0} \frac{h-3}{(h-2)^2} = -\frac{3}{4}$$

Es n: 17 pag 733 Applicando la definizione di derivata, calcolare nel punto x, la derivata della funzione:

$y = 2x-5$

x	y
$x+h$	$2(x+h)-5$

$$R_x = \frac{2(x+h)-5+5-2x}{h} = \frac{2h}{h} = 2$$

$$D(2x-5) = 2$$

Es n: 18 pag 733

$y = 3x^2-6x+4$

x	y
$x+h$	$3(x+h)^2-6(x+h)+4$

$$R_x = \frac{\cancel{3x^2}+6hx+3h^2-\cancel{6x}-6h\cancel{+4}-\cancel{3x^2}+\cancel{6x}\cancel{-4}}{h} = \frac{3h^2+6hx-6h}{h} = 3h+6x-6$$

$$D_x = \lim_{h\to 0}(3h+6x-6) = 6x-6$$

Es n: 19 pag 733

$y = 4x^3-2x^2+5x-3$

x	y
$(x+h)$	$4(x+h)^3-2(x+h)^2+5(x+h)-3$

$$R = \frac{\cancel{4x^3}+12x^2h+12xh^2+4h^3-\cancel{2x^2}-4hx-2h^2+\cancel{5x}+5h-3-\cancel{4x^3}+\cancel{2x^2}-\cancel{5x}+3}{h} = \frac{4h^3+12h^2x-2h^2+12x^2h+5h-4hx}{h}$$

$4h^2+12hx-2h+12x^2+5-4x$

$$D = \lim_{h\to 0}(4h^2+12hx-2h+12x^2+5) = 12x^2+5-4x$$

Es n: 20 pag 733

$y = \sqrt{x}$ $\left[D = \frac{1}{2}\right]$

x	y
$x+h$	$\sqrt{x+h}$

$$R = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \quad [\ldots]$$

13

__Esercizio__: calcolare l'equazione della retta tangente alla curva

$$y=\sqrt{x}$$

nel punto $P(1;1)$

$y-y_1$

$y-1=m(x-1)$ eq. del fascio di centro P

$y'_{x=1}=\frac{1}{2}$

$m=y'_{x=1}=\frac{1}{2}$

$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

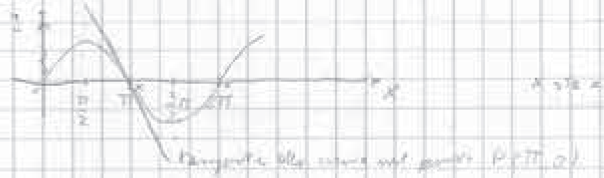
__Esercizio__: Determinare la derivata generica della funzione

$y=\operatorname{sen}x$

$$y'=\lim_{h\to0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\operatorname{sen}x\cos h+\operatorname{sen}h\cos x-\operatorname{sen}x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\operatorname{sen}x(\cos h-1)+\cos x\operatorname{sen}h}{h}=$$

$$\lim_{h\to0}\operatorname{sen}x\frac{\cos h-1}{h}+\lim_{h\to0}\cos x\frac{\operatorname{sen}x}{x}=\operatorname{sen}x\cdot0+\cos x\cdot\lim_{h\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=\cos x$$

$y'=\cos x$



$y=m(x-\pi)$

$m=\cos\pi=-1$

$y=-x+\pi$

Derivata del prodotto di funzioni

$$y=f(x)\cdot g(x)\cdot\varphi(x)$$

$$y'=f'(x)\cdot g(x)\cdot\varphi(x)+f(x)\cdot g'(x)\cdot\varphi(x)+f(x)\cdot g(x)\cdot\varphi'(x)$$

__Esercizio__

$y=x^2\cdot\operatorname{sen}x$

$y'=2x\cdot\operatorname{sen}x+x^2\cdot\cos x$

$y'_{x=0}=0$

Derivata di un quoziente

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$y'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$y=\operatorname{tg}x$

$y=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y'_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$P \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ y = 1 \end{cases}$$

$$y - 1 = m\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$m = 2$$

$y = 2x + 1 - \frac{\pi}{2}$ eq. della tangente alla curva di eq. $tg\,x$ nel punto $P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e} \quad 1$$

pongo $\frac{1}{x} = z \Rightarrow \lim_{x \to \infty} z = 0$

$$\lim_{z \to 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = e$$

$$\lg_5 \lim_{z \to 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = \lg_5 e$$

teorema che le operazioni (il lim e il lg) sono permutabili

$$\lim_{z \to 0} \lg_5 (1+z)^{\frac{1}{z}} = \lg_5 e$$

$$\boxed{\lim_{z \to 0} \frac{1}{z} \cdot \lg_5 (1+z) = \lg_5 e} \quad (2)$$

pongo $\lg_5 (1+z) = t \quad \lim_{z \to 0} \lg_5 (1+z) = \lim_{z \to 0} \lg_5 1 = 0$

$$\lim_{z \to 0} t = 0$$

$$1 + z = 5^t$$

$$z = 5^t - 1$$

sostituiamo nella (2)

$$\lim_{t \to 0} \frac{t}{5^t - 1} = \lg_5 e \Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{5^t - 1}{t} = \frac{1}{\lg_5 e} \quad \frac{1}{\lg_5 e} = \lg_e 5 \qquad \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{5^x - 1}{x} = \lg_e 5}$$

troviamo la derivata della funzione logaritmica

$$\cancel{y = \lg_5 x}$$

$$\cancel{R_x = \frac{\lg_5 (x+h) - \lg_5 x}{h}}$$

Derivata f. esponenziale

$$y = 5^x$$

$$R_x = \frac{5^{(x+h)} - 5^x}{h} = \frac{5^x \cdot 5^h - 5^x}{h} = 5^x \frac{5^h - 1}{h}$$

$$y'_x = \lim_{h \to 0} 5^x \frac{5^h - 1}{h} = 5^x \lim_{h \to 0} \frac{5^h - 1}{h} = 5^x \cdot \lg_e 5 \qquad y = 5^x \quad y'_x = 5^x \cdot \lg_e 5

16

$y = 5^x$

$y' = 5^x \lg_e 5$

caso particolare importante

$y = e^x$

$y' = e^x \cdot \lg_e e$

$y' = e^x$

Es n: 100 pag 738

$y = 5 \operatorname{sen} x + 3 \cos x$

$y' = 5 \cos x - 3 \operatorname{sen} x$

Es n: 101 pag 738

$y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$

$y' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = \frac{4}{4 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = \frac{4}{\operatorname{sen}^2 2x}$

Es n: 102 pag 738

$y = \operatorname{tg} x - x$

$y' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x$

Es n: 103 pag 738

$y = \operatorname{sen} x + \cos x$

$y' = \cos x - \operatorname{sen} x$

Es n: 104 pag 738

$y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

$y' = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x}{x^2} = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x^2} = \frac{\frac{x - \operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x}}{x^2} = \frac{x - \operatorname{sen} x \cos x}{x^2 \cos^2 x}$

Es n: 105 pag 738

$y = x \operatorname{ctg} x$

$y' = \operatorname{ctg} x - \frac{x}{\operatorname{sen}^2 x}$

Es n: 106 pag 738

$y = x \operatorname{sen} x \cos x$

$y' = \operatorname{sen} x \cos x + x \cos^2 x - x \operatorname{sen}^2 x = \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{2} + x (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + x \cos 2x$

Es n. 107 /pag 738

$y = x\sin x + \cos x$

$y' = \cancel{\sin x} + x\cos x - \cancel{\sin x} = x\cos x$

Es n: 108 /pag 738

$y = \sin x\cos x + x$

$y' = \cos^2 x - \sin^2 x + 1 = \cos^2 x - \cancel{1} + \cos^2 x + \cancel{1} = 2\cos^2 x$

Es n: 109 /pag 738

$y = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x)$

$y' = \frac{1}{2}(1 - \cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{2}(\sin^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{2}\cdot 2\sin^2 x = \sin^2 x$

Es n: 1 pag 761 Determinare l'eq. della tangente alla curva di eq. data nel punto $x = 0$.

$y = 3x^2 - x$

$P(0,0)$

$y = mx$ eq. del fascio di rette di centro P.

$y' = 6x - 1$ derivata generica della funzione

$y'_{x=0} = -1$ derivata nel punto P

$y = -x$

Es n: 2 pag 761 Determinare l'eq. della tangente alla curva di eq. data nel punto di ascissa $x = 2$

$y = x^3 - 2x + 2$

$P\begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}$

$y - 6 = m(x - 2)$ eq. del fascio di rette di centro P

$y' = 3x^2 - 2$

$y'_{x=2} = 10$

$y = 10x - 14$

Es n: 3 pag 761 Determinare l'eq. della tangente alla curva di eq. data nel punto di ascissa $x = 3$

$y = \frac{x^2}{x+1}$

$P\begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{9}{4} \end{cases}$

$y - \frac{9}{4} = m(x - 3)$

$y' = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 1}$

$y'_{x=3} = \frac{15}{16}$

$y = \frac{15}{16}x - \frac{9}{16}$

15 **Es n: 4 pag 761** Determinare l'eq. della tangente alla curva di eq. data nel punto di ascissa $x = 1$.

$$y = \frac{2x-1}{x}$$

$$P\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$y - 1 = m(x-1)$$

$$y' = \frac{2x - 2x + 1}{x^2} = \frac{-2x+3}{x^2}$$

$$y'_{x=1} = 1$$

$$y = x$$

Es n: 5 pag 762 Determinare l'eq. della tangente alla curva di eq. data nel punto di ascissa $x = 0$

$$y = \frac{x^2+1}{2x+3}$$

$$P\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$y - \frac{1}{3} = mx$$

$$y' = \frac{2x(2x+3) - 2(x^2+1)}{(2x+3)^2} = \frac{4x^2 + 6x - 2x^2 - 2}{4x^2 + 12x + 9} = \frac{+2x^2 + 6x - 2}{4x^2 + 12x + 9}$$

$$y'_{x=0} = -\frac{2}{9}$$

$$y = -\frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$$

Es n: 6 pag 762 Determinare l'eq. della tangente alla curva di eq. data nel punto di ascissa $x = -1$

$$y = \frac{2x-1}{3x+2}$$

La retta tangente alla curva nel punto P ha il coefficiente angolare uguale alla derivata della funzione nel punto (x_0).

$$P\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$y - 3 = m(x+1)$ eq. del fascio di rette di centro P escluso quella parallela all'asse x.

$$y' = \frac{2(3x+2) - 3(2x-1)}{(3x+2)^2} = \frac{6x + 4 - 6x + 3}{9x^2 + 12x + 4} = \frac{7}{3x^2 + 12x + 4}$$

$y'_{x=-1} = 7$ [illegible]

$$y = 7x + 10$$

Es n: 7 pag 762 Determinare l'eq. della tangente alla curva di eq. data nel punto di ascissa $x = 2$

$$y = x^2 + \frac{1}{x}$$

$$P\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$y - \frac{9}{2} = m(x-2)$$

$$y' = 2x - \frac{1}{x^2}$$

$$y'_{x=2} = \frac{15}{4}$$

$$y = \frac{15}{4}x + 12$$

$y = \cos x$

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h\to 0} \overset{\text{costante}}{\operatorname{sen} x} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1 \cdot 0 - \operatorname{sen} x \cdot 1 = 0 - \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x$$

$y = \frac{t^2+1}{2t+3}$ eq. oraria

$$V = y' = \frac{2t(2t+3) - 2(t^2+1)}{(2t+3)^2} = \frac{4t^2+6t-2t^2-2}{4t^2+12t+9} = \frac{2t^2+6t-2}{4t^2+12t+9}$$ eq. tachimetrica

$V_0 = y'_{t=0} = -\frac{2}{9}$ moto retrogrado

La derivata rispetto al tempo è scritta con $\dot{y}$.

Funzioni elementari

$\begin{cases} y = x^n \\ y' = nx^{n-1} \end{cases}$

$\begin{cases} y = \operatorname{sen} x \\ y' = \cos x \end{cases}$

$\begin{cases} y = \cos x \\ y' = -\operatorname{sen} x \end{cases}$

$\begin{cases} y = b^x \\ y' = b^x \lg_e b \end{cases}$ x $b = e \Rightarrow y' = e^x$

$\begin{cases} y = \lg_b x \\ y' = \frac{1}{x} \cdot \lg_b e \end{cases}$ x $b = e \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$

$\begin{cases} y = tg\, x \\ y' = \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$

$\begin{cases} y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \\ y = ctg\, x \end{cases}$

10 Funzioni composte

$y = \sin 2x$

$y' = 2\cos 2x \Rightarrow y'$ di $\sin 2x = \cos 2x$ e y' di $2x = 2$

$y = \lg \sin x$

$y' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$

$y = [\lg(5x^2+4) + 7x^6]^3$

$y' = 3[\lg(5x^2+4) + 7x^6]^2 \cdot \left(\frac{10x}{5x^2+4} + 42x^5\right)$ (derivata della funzione per la derivata dell'argomento della fun)

Es n: 176 pag 241

$y = \sqrt{x^2+9}$

$y' = (x^2+9)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\cancel{2}}(x^2+9)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

Es n: 177 pag 241

$y = \sqrt{1-x^2}$

$y' = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\cancel{2}}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -\cancel{2}x = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Es n: 178 pag 241

$y = \sqrt[3]{x^2+x+1}$

$y' = (x^2+x+1)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x+1) = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$

Es n: 179 pag 241

$y = \sqrt{4x^2-3}$

$y' = (4x^2-3)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(4x^2-3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 8x = \frac{4x}{\sqrt{4x^2-3}}$

Es n: 180 pag 241

$y = (1+\sqrt[3]{x})^3$

$y' = (1+\sqrt[3]{x})^3 = \cancel{3}(1+\sqrt[3]{x})^2 \cdot \frac{1}{\cancel{3}}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{x^2}}$

Es n: 181 pag 241

$y = \sqrt[5]{5x+3}$

$y' = (5x+3)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\cancel{5}}(5x+3)^{-\frac{4}{5}} \cdot \cancel{5} = 5x+3^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{(5x+3)^4}}$

~~Es n: 182 pag 241~~

~~$y = \sqrt{x^2+x+1}$~~

Esercizio: dato l'equazione della parabola $y = x^2$ e della retta $y = 6x + 7$, cioè:

$y = x^2$ $\qquad$ $y = 6x + 7$

Trovare l'eq della retta tangente alla parabola, parallela a quella retta

il coeff angolare della retta e della curva: $6 = 2x \ldots$

$2x = 6 \Rightarrow x = 3$ ascissa del punto di tangenza

$P\begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases}$ punto di tangenza

$y - 9 = m(x-3)$ eq del fascio di rette

$y - 9 = 6(x-3)$ eq. retta

Esercizio

$y = \sin^2 x$

$y' = 2 \sin x \cos x$

$\boxed{\text{Teorema}}$

Dimostrare che, se una funzione $f(x)$ è derivabile in un punto c, è ivi continua.

Ip $\exists\ f(x)$ $\qquad$ Ts $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

$\exists\ f'(x)$

Rs $f(c+h) = f(x)$ $\qquad$ $c \quad c+h$ incremento h $\qquad$ $c \quad x$ incremento $x-c$ $\qquad$ $f(c+h) = x \Rightarrow h = x-c$ $(x-c \neq 0$ se $x \to c)$

$R = \dfrac{f(x) - f(c)}{x-c}$ $\qquad$ $R = \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$

$\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x-c} = f'(c)$ numero finito

$f(x) - f(c) = f(x) - f(c)$

$f(x) - f(c) = \dfrac{f(x) - f(c)}{x-c} \cdot (x-c)$

$f(x) = \dfrac{f(x) - f(c)}{x-c} (x-c) + f(c)$

se ora vado a determinare il lim del I membro è uguale al II membro

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} \left[\overset{\text{rapporto incrementale}}{\dfrac{f(x) - f(c)}{x-c}} \cdot (x-c) + \overset{\text{costante}}{f(c)} \right]$

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c) + f'(c) \cdot 0$

siccome $f'(c)$ è per ipotesi un numero finito (perché la funzione è derivabile) allora $f'(c) \cdot 0 = 0$

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

17 Esercizio:

dimostrare che la funzione

$y = |x-2|$ funzione modulare

è continua nel punto 2 e non è derivabile in questo punto.

$y = |x-2|$

$$y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ -x+2 & x \leq 2 \end{cases}$$

Ip $y = x-2$

Ts $\lim_{x \to 2} (x-2) = f(2) = 0$

intorno: $\varepsilon > 0 : \exists I_c : \forall x \in I_c \cap D - \{c\} : l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$

$l-\varepsilon < x-2 < l+\varepsilon$

$$\begin{cases} x-2 > 0-\varepsilon \\ x-2 < 0+\varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2-\varepsilon \\ x < 2+\varepsilon \end{cases}$$

$2-\varepsilon \quad 2+\varepsilon$

$2-\varepsilon < x < 2+\varepsilon$

il che è un intorno di 2

$y = -x+2$

$\lim_{x \to 2} (-x+2) = f(2) = 0$

intorno: $\varepsilon > 0 \; \exists I_c \; \forall x \in I_c \cap D - \{c\} \; l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$

$-\varepsilon < -x+2 < \varepsilon$

$$\begin{cases} -x+2 > -\varepsilon \\ -x+2 < \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2+\varepsilon \\ x > 2-\varepsilon \end{cases}$$

$2-\varepsilon < x < 2+\varepsilon$

il che è un intorno di 2

La funzione è quindi continua nel punto 2

$y = x-2$, $x \geq 2$

$x \mid x-2$

$x+h \mid x+h-2$

$R_x = \dfrac{x+h-2-x+2}{h} = 1$

$\lim_{h \to 0} 1 = 1 \Rightarrow D = 1$

$h > 0$ scegliendo $x \geq 2$

$y = -x+2$, $x \leq 2$

$x \mid -x+2$

$x+h \mid -x-h+2$

$R_x = \dfrac{-x-h+2+x-2}{h} = -1$ (sinistro

$\lim_{h \to 0} -1 = -1 \Rightarrow D = -1$

$h < 0$ unito perché $x \leq 2$

Il* limite ordinario del rapporto incrementale non esiste.

*limite ordinario:

Es n: 182 pag 241

$y = \dfrac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$

$y' = \dfrac{(2x^2-2x+1)^{\frac{1}{2}}}{x} = \dfrac{\frac{1}{2}x(2x^2-2x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(4x-2) - (2x^2-2x+1)^{\frac{1}{2}}}{x^2} =$

$= \left[\dfrac{x(4x-2)}{2\sqrt{2x^2-2x+1}} - \sqrt{2x^2-2x+1}\right]\cdot\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{\cancel{4x^2}-2x-\cancel{4x^2}+4x-2}{2x^2\sqrt{2x^2-2x+1}} = \dfrac{\cancel{2}(x-1)}{\cancel{2}x^2\sqrt{2x^2-2x+1}} = \dfrac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$

Es n: 183 pag 241

$y = (5+x)\sqrt{5-x}$

$y' = (5+x)(5-x)^{\frac{1}{2}} = 1\cdot(5-x)^{\frac{1}{2}} + [(5+x)\cdot\frac{1}{2}(5-x)^{-\frac{1}{2}}]\cdot -1 = \sqrt{5-x} - \dfrac{5+x}{2\sqrt{5-x}} = \dfrac{10-2x-5-x}{2\sqrt{5-x}} =$

$\dfrac{5-3x}{2\sqrt{5-x}}$

Es n: 184 pag 241

$y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$

$y' = \dfrac{1+x^{\frac{1}{2}}}{1+(2x)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(1+\sqrt{2x}) - (1+\sqrt{x})\left[\frac{1}{2}(2x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\right]}{(1+\sqrt{2x})^2} = \dfrac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(1+\sqrt{2x}) - (1+\sqrt{x})\cdot(2x)^{-\frac{1}{2}}}{(1+\sqrt{2x})^2} =$

$= \left(\dfrac{1+\sqrt{2x}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{2x}}\right)\cdot\dfrac{1}{(1+\sqrt{2x})^2} = \dfrac{\sqrt{2x}+\cancel{2x}-2\sqrt{x}-\cancel{2x}}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{2x}}\cdot\dfrac{1}{(1+\sqrt{2x})^2} = \dfrac{\sqrt{2x}-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{2x}}\cdot\dfrac{1}{(1+\sqrt{2x})^2} =$

$2\sqrt{x} = \sqrt{2x}\cdot\sqrt{2}$

$\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{2x}\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{2x}}\cdot\dfrac{1}{(1+\sqrt{2x})^2} = \dfrac{\cancel{\sqrt{2x}}(1-\sqrt{2})}{2\sqrt{x}\cdot\cancel{\sqrt{2x}}}\cdot\dfrac{1}{(1+\sqrt{2x})^2} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{2x})^2}$

Es n: 185 pag 241

$y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}}$

$y' = \dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{0\cdot(1+x^2)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x}{(1+x^2)^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{-\frac{2}{3}x(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}}{(1+x^2)^{\frac{2}{3}}} = -\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}} =$

$= -\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}$

Es n: 186 pag 241

$y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$

$y' = \dfrac{1+x}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)}{1-x} = \dfrac{(1-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)}{1-x} = \left(\sqrt{1-x} + \dfrac{1+x}{2\sqrt{1-x}}\right)\cdot\dfrac{1}{1-x} =$

$= \dfrac{2-2x+1+x}{2\sqrt{1-x}}\cdot\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$

18

Es n: 187 pag 742

$$y=\left[\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}\right]$$

$$y'=\left[\frac{(1+x^3)^{\frac{8}{3}}}{8}-\frac{(1+x^3)^{\frac{5}{3}}}{5}\right]=\frac{\frac{8}{3}(1+x^3)^{\frac{5}{3}}\cdot 3x^2\cdot\cancel{8}}{\cancel{64}}-\frac{\frac{5}{3}(1+x^3)^{\frac{2}{3}}\,3x^2\cdot\cancel{5}}{\cancel{25}}=x^2(1+x^3)^{\frac{5}{3}}-x^2(1+x^3)^{\frac{2}{3}}$$

$$x^2\left[\sqrt[3]{(1+x^3)^5}-\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\right]=x^2\left[(1+x^3)\sqrt[3]{(1+x^3)^2}-\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\right]=x^2\cdot\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\left[\cancel{1}+x^3-\cancel{1}\right]=x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}$$

Es n: 193 pag 742

$y=\sin 3x$

$y'=\cos 3x\cdot 3=3\cos 3x$

Es n: 195 pag 742

$y=\ y=3\sin(3x+5)$

$y'=3\cos(3x+5)\cdot 3=9\cos(3x+5)$

Es n: 197 pag 742

$y=\sin\frac{1}{x}$

$y'=\cos\frac{1}{x}\cdot-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$

Es n: 220 pag 744

$y=[\sin(x+2)\cos(x+2)]$

$y'=\cos^2(x+2)-\sin^2(x+2)=2\cos(x+2)$

Es n: 242 pag 744

$y=\lg(1-x^2)$

$y'=\frac{1}{1-x^2}\cdot-2x=-\frac{2x}{1-x^2}$

Es n: 243 pag 744

$y=\lg_3(x^2-1)$

$y'=\frac{1}{x^2-1}\cdot\lg_3 e\cdot 2x=\frac{2x}{(x^2-1)\lg_e 3}$

Esercizio: Dato l'equazione

$y = \sin^4 x$ trovare l'eq della tangente nel punto di ascissa $\frac{\pi}{3}$

$y' = 4\sin^3 x \cdot \cos x$

$P\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ y = \frac{9}{16} \end{cases}$

$y - \frac{9}{16} = m\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

$y'_{x=\frac{\pi}{3}} = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ (m)

$y = \frac{3\sqrt{3}}{8}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{9}{16}$

Esercizio: dato la funzione

$y = \sin x \cdot \lg x$. Trovare la derivata

$y' = \cos x \lg x + \frac{1}{x}\sin x = \cos x \lg x + \frac{\sin x}{x}$

Definizione di funzione crescente in un punto

Si dice che una funzione $f(x)$ è crescente in un punto c se esiste un intorno completo di c H_c tale che per ogni x appartenente ad H_c e al dominio escluso c si ha:

se $x < c \Rightarrow f(x) < f(c)$

se $x > c \Rightarrow f(x) > f(c)$

crescente

$\exists H_c : \forall x \in H_c \cap D - \{c\} \begin{cases} x < c \Rightarrow f(x) < f(c) \\ x > c \Rightarrow f(x) > f(c) \end{cases}$

decrescente

$\exists H_c : \forall x \in H_c \cap D \ \{c\} \begin{cases} x < c \Rightarrow f(x) > f(c) \\ x > c \Rightarrow f(x) < f(c) \end{cases}$

Teorema:

Se una funzione $f(x)$ ha in un punto c la derivata positiva (negativa), la funzione è crescente (de-crescente) in c.

I_p: $\exists f'(c) > 0$ T_h: $f(x)$

$\exists H_c : \forall x \in H_c \cap D - \{c\}$:

$f(x) < f(c) \quad x < c$

$f(x) > f(c) \quad x > c$

c.v.d.

$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(x) > 0$

Per il teorema della permanenza del segno:

$\exists H_c : \forall x \in H_c \cap D - \{c\}$: [si ha:]

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0 \begin{cases} x<0 \Rightarrow f(x) < f(c) \\ x>0 \Rightarrow f(x) > f(c) \end{cases}$$

la funzione è ... / essendo il numeratore / e il denominatore concordi

In modo analogo si dimostra che se la derivata di una funzione è negativa in un punto c, la funzione è decrescente.

* In un intorno di c e non nel punto.

Se in un punto c la derivata è nulla, la questione è indecidibile.

Es n: 128 pag 742

$$y = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$$

$$y' = \frac{4}{3}\frac{(x-1)^{\frac14}}{(x+2)^{\frac14}} = \frac{4}{3}\left[\frac{\frac14(x-1)^{-\frac34}(x+2)^{\frac14} - \frac14(x+2)^{-\frac34}(x-1)^{\frac14}}{(x+2)^{\frac12}}\right] = \frac14\cdot\frac43\left\{\left[(x-1)^{-\frac34}(x+2)^{\frac14} - (x+2)^{-\frac34}(x-1)^{\frac14}\right]\frac{1}{(x+2)^{\frac12}}\right\} =$$

$$= \frac13\left[\frac{\sqrt[4]{x+2}}{\sqrt[4]{(x-1)^3}} - \frac{\sqrt[4]{x-1}}{\sqrt[4]{(x+2)^3}}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac13\left[\frac{\sqrt[4]{(x+2)^4}-\sqrt[4]{(x-1)^4}}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^3}}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac13\frac{x+2-x+1}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+2}} =$$

$$\frac13\frac{3}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^3}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{(x+2)^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$$

Es n: 129 pag 742

$$y = [(a+x)\sqrt{a-x}]$$

$$y' = (a+x)(a-x)^{\frac12} = (a-x)^{\frac12}\cdot(a+x)\cdot\frac12(a-x)^{-\frac12}\cdot -1 = \sqrt{a-x} - \frac{a+x}{2\sqrt{a-x}} = \frac{2a-2x-a-x}{2\sqrt{a-x}} = \frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$$

Es n: 130 pag 742

$$y = \sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}$$

$$y' = (x+a)^{\frac12}(x+b)^{\frac12}(x+c)^{\frac12} = \frac12(x+a)^{-\frac12}(x+b)^{\frac12}(x+c)^{\frac12} + \frac12(x+a)^{\frac12}(x+b)^{-\frac12}(x+c)^{\frac12} + \frac12(x+a)^{\frac12}(x+b)^{\frac12}(x+c)^{-\frac12} =$$

$$\frac{\sqrt{(x+b)(x+c)}}{2\sqrt{x+a}} + \frac{\sqrt{(x+a)(x+c)}}{2\sqrt{x+b}} + \frac{\sqrt{(x+a)(x+b)}}{2\sqrt{x+c}} = \frac{(x+b)(x+c)+(x+a)(x+c)+(x+a)(x+b)}{2\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}} =$$

$$= \frac{x^2+bx+cx+bc+x^2+ax+cx+ac+x^2+ax+bx+ab}{2\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}} = \frac{3x^2+2(a+b+c)x+ab+ac+bc}{2\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}}$$

Es n: 131 pag 742

$$y = \sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$$

$$y' = (x+x^{\frac12})^{\frac13} = \frac13(x+x^{\frac12})^{-\frac23}\cdot\left(1+\frac12x^{-\frac12}\right) = \frac13(x+\sqrt{x})^{-\frac23}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac13\frac{1}{\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^2}}\cdot\frac{1+2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} =$$

$$\frac{1+2\sqrt{x}}{6\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^2}}$$

Es n: 132 pag 242

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-x^4}}$$

$$y' = \frac{1}{(1-x^2-x^4)^{\frac12}} = \frac{-\frac12(1-x^2-x^4)^{-\frac12}\cdot(-4x^3-8x^7)}{1-x^2-x^4} = +\frac{-4x^3-8x^7}{2\sqrt{(1-x^2-x^4)^3}} = \frac{2x^3-4x^7}{\sqrt{(1-x^2-x^4)^3}}$$

Es n: 134 pag 242

$$y = a\cos\frac{x}{3}$$

$$y' = -a\,\mathrm{sen}\frac{x}{3}$$

Es n: 136 pag 242

$$y = \cos(ax+5)$$

$$y' = -\mathrm{sen}(ax+5)\cdot a = -a\,\mathrm{sen}(ax+5)$$

Es n: 138 pag 242

$$y = \mathrm{tg}\,\frac{x+1}{2}$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2\frac{x+1}{2}}\cdot\left[\frac{1\cdot 2+0}{4}\right] = \frac{1}{2\cos^2\frac{x+1}{2}}$$

Una funzione è crescente in un intervallo se è crescente in ogni suo punto

Esercizio: studiare la seguente funzione (n: 226 pag 800)

$y = x^3-3x \qquad D = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2-3$

$3x^2-3>0$

$x^2-1>0$

Dunque la funzione ha il seguente andamento

~~f(-1)=2~~ per $x<-1$ $f(x)$ cresce

~~f(1)=-2~~ per $-1<x<1$ $f(x)$ decresce

per $x>1$ $f(x)$ cresce

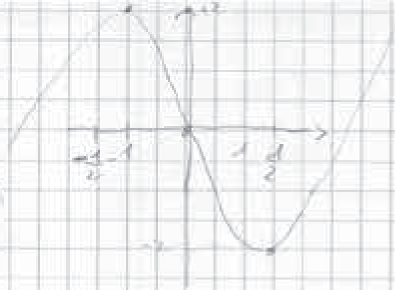
Di conseguenza si ha che:

per $x=-1$ la funzione ha un massimo relativo che vale:

$f(-1)=2$

per $x=1$ la funzione ha un minimo relativo che vale

$f(1)=-2$



punti di incontro con l'asse x.

$$\begin{cases} y = x^3 - 3x \\ y = 0 \end{cases}$$

$x^3 - 3x = 0$

$x(x^2 - 3) = 0$

$x = 0$

$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Dunque i punti di incontro con l'asse delle x sono:

$A(-\sqrt{3}, 0)$; $O(0, 0)$; $B(\sqrt{3}, 0)$

$D = \mathbb{R}$

$I = \mathbb{R}$

La funzione non è iniettiva; e c è il massimo della funzione relativo ad un intorno x -1.

Il massimo di una funzione è quello della sua immagine

Studio di funzioni

- Dominio
- Derivata prima
- Decrescenza e crescenza della funzione
- Massimi e minimi relativi e assoluti

Es n° 230 pag 800 Studiare la seguente funzione:

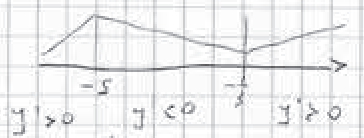
$y = x^3 + 8x^2 + 5x - 2$ funzione razionale intera di III grado: il grafico sarà una curva di III ordine.

$D = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 + 16x + 5$

$3x^2 + 16x + 5 \geq 0$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64-15}}{3} = \frac{-8 \pm 7}{3} = \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$



Dunque la funzione ha il seguente andamento:

per $x < -5$ la funzione cresce

per $-5 < x < -\frac{1}{3}$ la funzione decresce

per $x > -\frac{1}{3}$ la funzione cresce

Di conseguenza si ha che:

per $x = -5$ la funzione ha un massimo relativo che vale:

$f(-5) = 48$

per $x = -\frac{1}{3}$ la funzione ha un minimo relativo che vale:

$f(-\frac{1}{3}) = -\frac{70}{27}$

Punti d'incontro con l'asse x

$$\begin{cases} y = x^3 + 8x^2 + 5x - 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$x^3 + 8x^2 + 5x - 2 = 0$

$f(-1) = -1 + 8 - 5 - 2 = 0$

$x = -1$

$(x+1)(x^2 + 7x - 2) = 0$

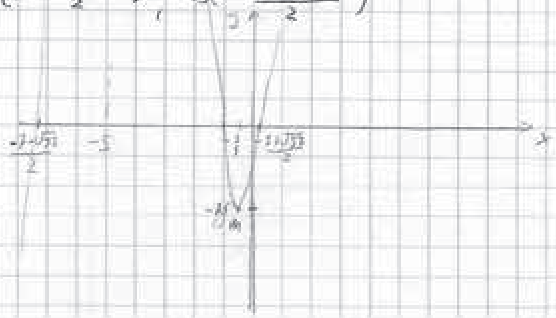
$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$x^2 + 7x - 2 = 0$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49+8}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{57}}{2} \begin{cases} \frac{-7-\sqrt{57}}{2} \\ \frac{-7+\sqrt{57}}{2} \end{cases}$$

Dunque i punti d'incontro con l'asse x sono:

$A\left(\frac{-7-\sqrt{57}}{2}\right)$; $B\left(\frac{-7+\sqrt{57}}{2}\right)$



Es n: 4 pag 292 Studiare la seguente funzione:

$y = x^5 - x^4$

$D = \mathbb{R}$

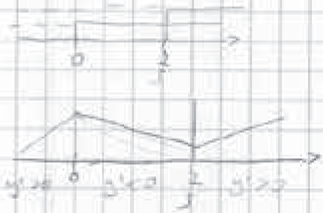
$y' = 5x^4 - 4x^3$

$5x^4 - 4x^3 \geq 0$

$x^3(5x-4) \geq 0$

$x^3 \geq 0$

$5x - 4 \geq 0$ per $x \geq \frac{4}{5}$



Dunque la funzione ha il seguente andamento:

per $x < 0$ è crescente

per $0 < x < \frac{4}{5}$ è decrescente

per $x > \frac{4}{5}$ è crescente

Di conseguenza si ha che:

per $x = 0$ la funzione ha un massimo relativo che vale:

$f(0) = 0$

per $x = \frac{4}{5}$ la funzione ha un minimo relativo che vale:

$f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1024}{3125} - \frac{256}{625} = \frac{1024 - 1280}{3125} = -\frac{256}{3125}$

Punti d'incontro con l'asse x:

$\begin{cases} y = x^5 - x^4 \\ y = 0 \end{cases}$

$x^5 - x^4 = 0$

$x = 0$

$x = 1$

Dunque i punti d'incontro con l'asse dell x sono:

~~A(-1,0)~~ ; $O(0,0)$; $B(1,0)$

Es n: 5 pag 282   Studiare la seg. funzione:

$y = x^3 - 2x^2 + 1$

$D = \mathbb{R}$

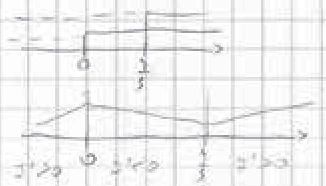
$y' = 3x^2 - 4x$

$3x^2 - 4x \geq 0$

$x(3x - 4) \geq 0$

$x \geq 0$

$3x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{4}{3}$



Dunque la funzione ha il seguente andamento:

per $x < 0$ è crescente

per $0 < x < \frac{4}{3}$ è decrescente

per $x > \frac{4}{3}$ è crescente

Di conseguenza si ha che:

per $x = 0$ la funzione ha un massimo relativo che vale:

$f(0) = 1$

per $x = \frac{4}{3}$ la funzione ha un minimo relativo che vale:

$f(\frac{4}{3}) = -\frac{5}{27}$

Punti d'incontro con l'asse x:

$$\begin{cases} y = x^3 - 2x^2 + 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$x^3 - 2x^2 + 1 = 0$

$(x-1)(x^2 - x - 1) = 0$

$x = 1$

$x^2 - x - 1 = 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

I punti d'incontro sono:

$A(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0)$; $B(1, 0)$; $C(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0)$

21 **Esercizio 38 pag 801** Studiare la seg. funzione:

$y = x^4 - 5x^2 + 4$ $\quad (y = (x-1)(x+1)(x+2)(x-2))$

$D = \mathbb{R}$

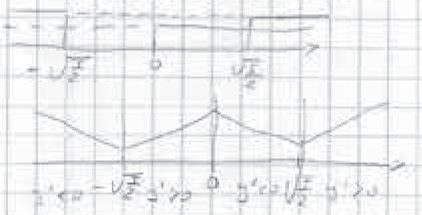
$y' = 4x^3 - 10x$

$4x^3 - 10x \geq 0$

$x(4x^2 - 10) \geq 0$

$x \geq 0$

$4x^2 - 10 \geq 0$ per $x \leq -\sqrt{\frac{5}{2}}$ et $x \geq \sqrt{\frac{5}{2}}$



Di conseguenza si ha che:

per $x < -\sqrt{\frac{5}{2}}$ la funzione decresce

per $-\sqrt{\frac{5}{2}} < x < 0$ la funzione cresce

per $0 < x < \sqrt{\frac{5}{2}}$ la funzione decresce

per $x > \sqrt{\frac{5}{2}}$ la funzione cresce

Di conseguenza si ha che:

per $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ la funzione ha un minimo ~~relativo~~ che vale $-\frac{9}{4}$.

per $x = 0$ la funzione ha un massimo relativo che vale 4.

Punti d'incontro con l'asse x:

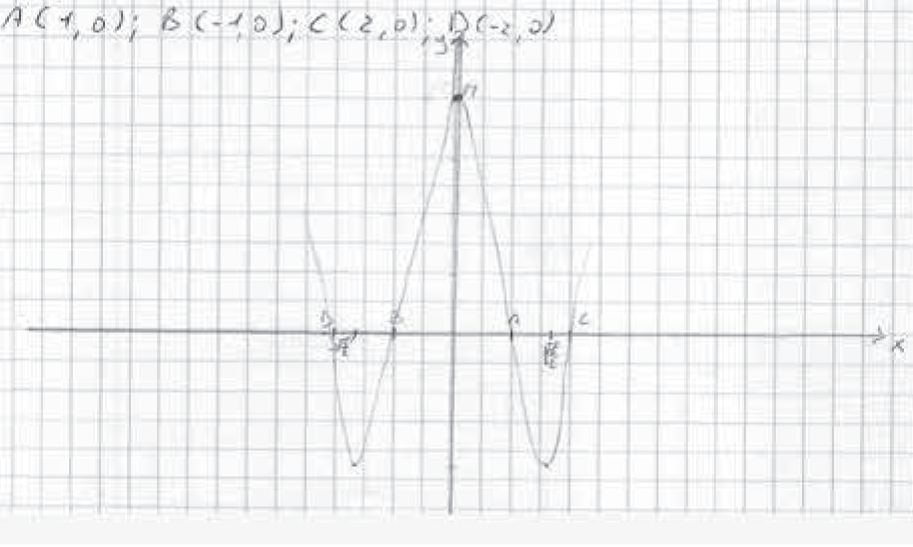
$$\begin{cases} y = x^4 - 5x^2 + 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

$(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) = 0$

$x = 1$
$x = -1$
$x = 2$
$x = -2$

Dunque i punti d'incontro con l'asse x sono:

$A(1,0)$; $B(-1,0)$; $C(2,0)$; $D(-2,0)$



Es n° 9 pag 282   Studiare la seg. funzione:

$y = x^4 - 8x^2 + 2$

$D = \mathbb{R}$

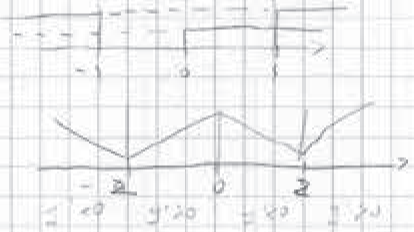
$y' = 4x^3 - 16x$

$4x^3 - 16x \geq 0$

$x(4x^2 - 16) \geq 0$

$x \geq 0$

$4x^2 - 16 \geq 0$ per $x \leq -2$ et $x \geq 2$



Dunque la funzione ha il seguente andamento:

per $x < -2$ è decrescente

per $-2 < x < 0$ è crescente

per $0 < x < 2$ è decrescente

per $x > 2$ è crescente

Di conseguenza si ha che

per $x = 0$ la funzione ha un massimo relativo di valore:

$f(0) = 2$

per $x = \pm 2$ la funzione ha due minimi relativi che valgono

$f(\pm 2) = -14$

Punti d'incontro con l'asse x:

$$\begin{cases} y = x^4 - 8x^2 + 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$x^4 - 8x^2 + 2 = 0$

$x^2 = 4 \pm \sqrt{16 - 2} = 4 \pm \sqrt{12}$

12 Esercizio: studiare la funzione

$y = x^3 - 3x$

Funzione razionale intera di 3° grado:

il grafico della funzione sarà una curva di 3° grado

comportamento della funzione

$\lim_{x\to\infty} (x^3 - 3x)$ $\quad \infty - \infty$ Forma indeterminata

$\lim_{x\to-\infty} x(x^2 - 3x)$ $\quad -\infty$

$\lim_{x\to\infty} (x^3 - 3x)$ $\quad \infty - \infty$

$\lim_{x\to+\infty} x(x^2 - 3)$ $\quad \infty$

Punti d'incontro con gli assi cartesiani:

- con l'asse x:

$$\begin{cases} y = x^3 - 3x \\ y = 0 \end{cases}$$

$x(x^2 - 3) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = -\sqrt{3}$

$x_3 = \sqrt{3}$

I punti d'incontro con l'asse x sono:

$O(0,0)$; $A(-\sqrt{3}, 0)$; $B(\sqrt{3}, 0)$

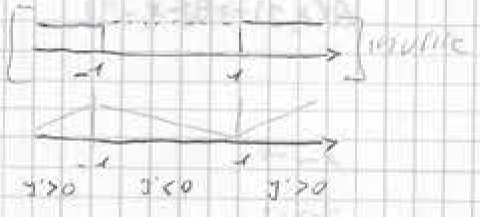
Studio dell'andamento della funzione

$y' = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 \geq 0$

$x_1 = 1$

$x_2 = -1$



Dunque:

per $x < -1$ la funzione è crescente

per $-1 < x < 1$ la funzione è decrescente

per $x > 1$ la funzione è crescente

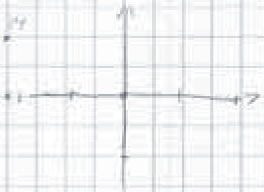
Da cui deduco che

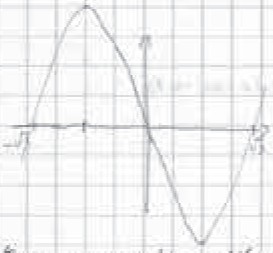
per $x = -1$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f(-1) = 2$

per $x=-1$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$f(1)=-2$





La curva è simmetrica rispetto all'origine

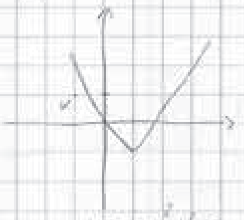
Due punti A e B sono simmetrici rispetto ad un punto M quando M è il punto di mezzo del segmento A B.

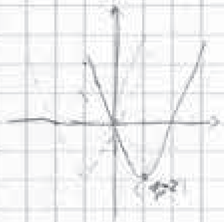
Una curva è simmetrica rispetto a un punto M quando ad ogni punto della curva ne corrisponde un'altro che è simmetrico ad M.

Se il punto di simmetria è l'origine del sistema di riferimento, una curva è simmetrica se ... se le coordinate di A sono x e y e le coordinate di B sono $-x$ e $-y$

Trova le eq. delle ... simm. di quella data rispetto all'asse y

$y=x^2-2x$





$I=[-2,+\infty)$

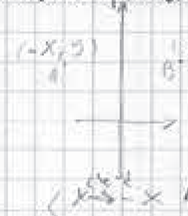
$y=ax^2+bx$

$y=x^2+2x$

$\begin{cases} a-b=-2 \\ 4a-2b=0 \end{cases}$ $(-1,-2)$

$a=2$

Punti simmetrici rispetto all'asse y



$\begin{cases} x \to -x \\ y \to y \end{cases}$ $A(x,y) \to B(-x,y)$

$x \to -x$

$y=x^2+2x$ $y \to y$

Punti simmetrici rispetto all'asse x

$A(x,y) \to B(x,-y)$

$x \to x$

$y \to -y$

Punti simmetrici rispetto all'origine

$A(x,y) \to B(-x,-y)$

$x \to -x$

$y \to -y$

Es n. 223 pag 800   Studiare la seg. funzione:

$y = 2x^2 - 3x + 1$ è funzione razionale intera di secondo grado per cui il grafico della funzione è una curva di secondo ordine - Dominio $= \mathbb{R}$

Comportamento della funzione agli estremi:

$\lim_{x \to -\infty} (2x^2 - 3x + 1)$ $\infty + \infty$ forma indeterminata

$\lim_{x \to +\infty} (2x^2 - 3x + 1)$ $\infty - \infty$ forma indeterminata

Punti d'incontro con gli assi cartesiani:

- con l'asse x

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 3x + 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$2x^2 - 3x + 1 = 0$

$x = \frac{3 \pm 1}{4} < \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix}$

$x_1 = 1$
$x_2 = 2$

I punti d'incontro con l'asse x sono:

$A(\frac{1}{2}, 0)$; $B(1, 0)$

Studio dell'andamento della funzione:

$y' = 4x - 3$

$4x - 3 \geq 0$ per $x \geq \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}$

Dunque

per $x < \frac{3}{4}$ la funzione è decrescente

per $x > \frac{3}{4}$ la funzione è crescente

Da cui si deduce che:

per $x = \frac{3}{4}$ la funzione ha un minimo relativo di cui il valore è:

$y(\frac{3}{4}) = -\frac{1}{8}$

$y = x^3 \operatorname{sen} 2x$

$y' = 3x^2 \operatorname{sen} 2x + x^3 \cdot 2\cos 2x$

$y = -x^3 \cdot -\operatorname{sen} 2x$

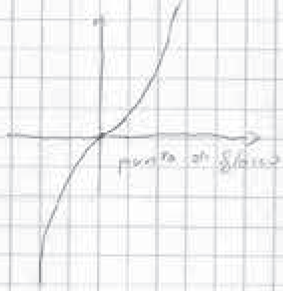
$y = x^3 \operatorname{sen} 2x$

$y = x^3$

$y' = 3x^2$

$f'(0) = 0$

$f'(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$



La tangente in un punto di flesso si chiama tangente inflessionale

$\boxed{\text{Teorema}}$

Se una funzione $f(x)$ ha in un punto c la derivata prima nulla e la derivata seconda positiva, la funzione $f(x)$ ha in c un minimo relativo

Es n: 242 pag 806 studiare la seguente funzione

$y = 4x(x-1)^3 \qquad D = \mathbb{R}$

Comportamento della funzione agli estremi del dominio

$\lim_{x \to -\infty} 4x(x-1)^3 = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} 4x(x-1)^3 \quad +\infty$

Punti d'incontro con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} y = 4x(x-1)^3 \\ y = 0 \end{cases}$$

$4x(x-1)^3 = 0$

$x = 0$

$x = 1$

I punti d'incontro con l'asse x:

$O(0,0)$; $A(1,0)$

Studio dell'andamento della funzione:

$y' = 4(x-1)^3 + 12x(x-1)^2$

$4(x-1)^2[x-1+3x]$

$4(x-1)^2(4x-1)$

Dunque: per $x < \frac{1}{4}$ la funzione è decrescente

per $x > \frac{1}{4}$ la funzione è crescente

Da ciò si deduce che:

per $x = \frac{1}{4}$ la funzione ha un minimo relativo di pole:

$f(-\frac{1}{4}) = -\frac{27}{65}$

Es n° 246 pag 801

$y = \dfrac{x-1}{x+1}$ funzione razionale fratta

$D = \{\forall x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq -1\}$ $D = \mathbb{R} - \{-1\}$ $D = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$

Comportamento della funzione agli estremi del dominio

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{-\infty}{-\infty}$ Forma indeterminata

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{\infty}{\infty}$ Forma indeterminata

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 1$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x-1}{x+1} = -\frac{2}{0} = \mp\infty$

~~il denominatore tende a zero~~

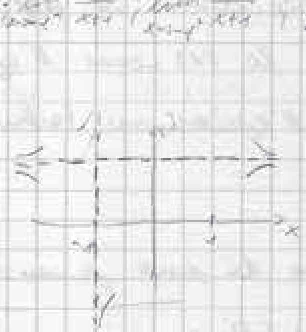
Denominatore tende a zero

~~numeratore~~

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x-1}{x+1} = \pm\infty$

Asintoti

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-1}{x+1}$ $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x-1}{x+1}$ $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x-1}{x+1}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{x+1}$



Punti d'incontro con gli assi cartesiani

$\begin{cases} y = \dfrac{x-1}{x+1} \\ y = 0 \quad \text{asse } x \end{cases}$

$\dfrac{x-1}{x+1} = 0$

$x = 1$

Il punto d'incontro con l'asse x:

$A(1, 0)$

$\begin{cases} y = \frac{x-1}{x+1} \\ x = 0 \end{cases}$

$y = -1$

Il punto d'incontro con l'asse y:

$(0, -1)$

Studio del segno della funzione

$\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$

$x - 1 \geq 0 \to x \geq 1$

$x + 1 > 0 \to x > -1$

$x < -1$ $y > 0$

$-1 < x < 1$ $y < 0$

$x > 1$ $y > 0$

$x = 1$ $y = 0$

l'incontro con l'asse y = B(0, -1)

Studio dell'andamento della funzione:

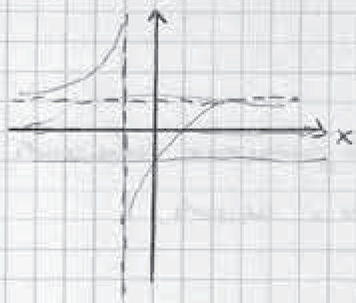
$y' = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

$\frac{2}{(x+1)^2} > 0 \quad \forall x \neq -1$

Andamento della funzione

$y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \ \forall x \in D$

La funzione è sempre crescente in tutto il D.



$\boxed{\text{Compito di Matematica del 30.11.1985}}$ Fila 2

Determinare il dominio della seguente funzione e calcolarne la derivata:

$y = \sqrt{4-x^2}$

Studiare la funzione e tracciarne il grafico:

$y = x^3 - 2x^2 + x$

Determinare l'equazione della retta tangente alla curva nel punto di ascissa 0 (zero). Successivamente determinare l'equazione della curva simmetrica alla precedente rispetto all'asse x e tracciarne il grafico.

Posto $x = t$, interpretare la (1) come l'equazione oraria di un punto che si muove sull'asse y; calcolare l'equazione parametrica e l'istante in cui la velocità è uguale a $1 \frac{m}{sec}$.

Definire la decrescenza di una funzione in un punto c e dimostrare che ciò avviene quando è $f'(c) < 0$.

- Dominio e derivata:

$y = \sqrt{4-x^2}$

$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 < x < 2$

$D = \{ \forall x \in R / -2 < x < 2 \}$

$y' = \left(\frac{1}{2}(4-x^2)\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2x = -x \cdot (4-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

- Studio della funzione e grafico:

$y = x^3 - 2x^2 + x$ funzione razionale intera di 3° grado. Il grafico è una curva di 3° ordine.

$D = \mathbb{R}$

25 Comportamento agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x^2+x)=\lim_{x\to-\infty}[x(x-1)^2]=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}[x(x-1)^2]=+\infty$$

Punti d'incontro con gli assi cartesiani:

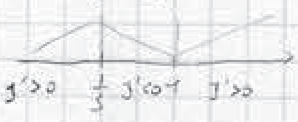
- con l'asse x:

$$\begin{cases} y=x^3-2x^2+x \\ y=0 \end{cases}$$

$x(x-1)^2=0$
$x_1=0$
$x_2=x_3=1$

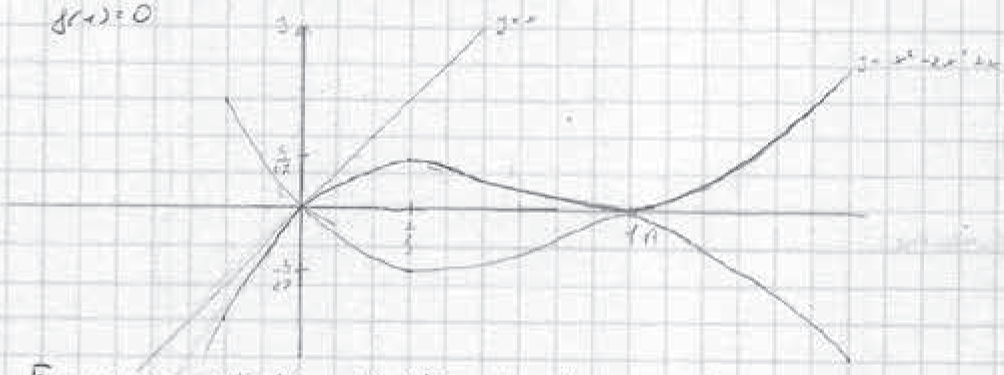
I punti sono:
$O(0,0)$, $A(1,0)$

Studio dell'andamento della funzione:
$y'=3x^2-4x+1$
$3x^2-4x+1\geq 0$
$x=\frac{2\pm1}{3} \begin{matrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{matrix}$



Dunque:
per $x<\frac{1}{3}$ la funzione cresce
per $\frac{1}{3}<x<1$ la funzione decresce
per $x>1$ la funzione cresce

Da ciò si deduce che:
per $x=\frac{1}{3}$ la funzione ha un massimo relativo che vale:
$f(\frac{1}{3})=\frac{4}{27}$
per $x=1$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:
$f(1)=0$



Equazione retta tangente alla curva nel punto di ascissa $x=0$.
$y=x^3-2x^2+x$
$P\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$y=mx$ eq. del fascio di rette di centro O.
$y'=3x^2-4x+1$
$y'_{x=0}=1$
$y=x$ eq. della tangente alla curva in O

Equazione curva simmetrica alla data rispetto all'asse x:

$x \to x$

$y \to -y$

$-y = x^3 - 2x^2 + x$

$y = -x^3 + 2x^2 - x$

[eq. vachimetrica]

[decrescenza e teorema]

Compito di Matematica del 30.11.1995 Fila 1:

- Dominio e derivata della funzione:

$y = \sqrt{x^2 - 3x}$

$x^2 - 3x \geq 0$

$x(x-3) \geq 0$

$D = \{\forall x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \lor x \geq 3\}$

$y' = [\frac{1}{2}(x^2 - 3x)]^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x-3) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$

- Studio e grafico della funzione:

$y = -x^3 + 3x^2 - 2x$

funzione razionale intera di 3° ~~grado~~ grado, il grafico è una curva di 3° ordine

$\lim_{x \to -\infty} (-x^3 + 3x^2 - 2x) =$

$\lim_{x \to +\infty} (-x^3 + 3x^2 - 2x) =$

Incontro con gli assi cartesiani:

$\begin{cases} y = -x^3 + 3x^2 - 2x \\ y = 0 \end{cases}$

$-x(x^2 - 3x + 2) = 0$

$x = 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$

$x_2 = 1$

$x_3 = 2$

I punti sono:

$O(0,0)$; $A(1,0)$; $B(2,0)$

Studio dell'andamento della funzione:

$y' = -3x^2 + 6x - 2$

$-3x^2 + 6x - 2 \geq 0$

$3x^2 - 6x + 2 \leq 0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{3} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} \begin{matrix} 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{matrix}$

per $x < 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$ la funzione cresce

per $1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} < x < 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$ la funzione decresce

per $x > \frac{1}{3}\sqrt{3} + 1$ la funzione cresce

26 per $x = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f(1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}) = \ldots$

per $x = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$f(1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}) =$

Esercizio n: 146 pag 792

Fra tutti i rettangoli che hanno lo semiperimetro $2p$, determinare quello di area minimo.

$$\begin{cases} s = x(p-x) \\ 0 \le x \le p \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = -x^2 + px \\ 0 \le x \le p \end{cases}$$

$f(0) = 0$

$f(p) = 0$

$s' = -2x + p$

$-2x + p > 0$

$x < \frac{1}{2}p$

$y' > 0 \quad \frac{1}{2}p \quad y' < 0$

per $x = \frac{1}{2}p$ si ha un massimo relativo di cui:

$f(\frac{1}{2}p) = \frac{1}{4}p^2$

Confrontando $\frac{1}{4}p^2$ con $f(0)$ e $f(p)$ concludo che $\frac{1}{4}p^2$ è il massimo assoluto della funzione

Dunque fra tutti i rettangoli che hanno lo semiperimetro quello di area massima è quello che ha la base di $\frac{1}{2}p$:

è il quadrato.

Es n: 247 pag 801 Studiare la seg. funzione:

$y = \frac{3x}{3x-2}$

$D = \{\forall x \in R \,/\, x \neq \frac{2}{3}\} = (-\infty; \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$

Comportamento della funzione agli estremi del dominio:

$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x}{3x-2}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{3 - \frac{2}{x}} = \frac{3}{3} = 1$

$\lim_{x \to \frac{2}{3}^-} \frac{3x}{3x-2} = \frac{2}{-0} = -\infty$

$\lim_{x \to \frac{2}{3}^+} \left(\frac{3x}{3x-2}\right) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{3x-2} = \frac{3}{3 - \frac{3}{x}} = \frac{3}{3} = 1$

Studio del segno della funzione

$\frac{3x}{3x-2} \geq 0$

$3x \geq 0$ per $x \geq 0$

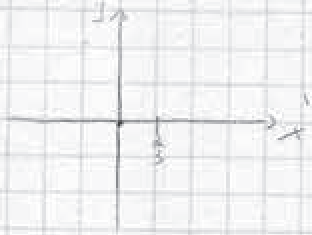
$3x-2 \geq 0$ per $x > \frac{2}{3}$

$x<0 \quad y>0$

$x=0 \quad y=0$

$0<x<\frac{2}{3} \quad y<0$

$x>\frac{2}{3} \quad y>0$



Punti d'incontro con gli assi:

- con l'asse x

$\begin{cases} y=\frac{3x}{3x-2} \\ y=0 \end{cases}$

$\frac{3x}{3x-2}=0 \Rightarrow x=0$

Il punto d'incontro con l'asse x è: $O(0,0)$

- con l'asse y

$\begin{cases} y=\frac{3x}{3x-2} \\ x=0 \end{cases}$

$O(0,0)$

Studio dell'andamento della funzione

$y' = \frac{3(3x-2)-9x}{(3x-2)^2}$

$-\frac{6}{(3x-2)^2} < 0 \quad \forall x \in D$

la funzione è sempre decrescente

Es n. 257/pag 801

$$y = \frac{4x}{x^2+x-2}$$

Funzione razionale fratta

D: $x^2+x-2 \neq 0$

$x^2+x-2=0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \swarrow^{-2}_{1}$$

$$D = \{\forall x \in \mathbb{R} / x \neq -2 \text{ et } x \neq 1\} = (-\infty; -2) \cup (-2; 1) \cup (1; +\infty)$$

Comportamento della funzione agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{4x}{x^2+x-2}\right) = \lim \frac{\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{4x}{x^2+x-2} = \frac{-8}{-0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{4x}{x^2+x-2} = -\infty \quad \left[\frac{-8}{+0}\right]$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{4x}{x^2+x-2} = -\infty \quad \left[\frac{4}{-0}\right]$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{4x}{x^2+x-2} = +\infty \quad \left[\frac{4}{+0}\right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{x^2+x-2} = \lim \frac{\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = 0$$

Studio del segno della funzione

$$\frac{4x}{(x+2)(x-1)} \geq 0$$

$4x \geq 0$ per $x \geq 0$

$(x+2)(x-1) > 0$

$x+2 > 0$ per $x > -2$

$x-1 > 0$ per $x > 1$

28 Incontro con gli assi coordinati:

$O(0,0)$ con l'asse x e l'asse y

Studio dell'andamento della funzione:

$$y' = \frac{4(x^2+x-2)-4x(2x+1)}{(x+2)^2\cdot(x-1)^2} = \frac{4x^2+4x-8-8x^2-4x}{(x+2)^2\cdot(x-1)^2} = \frac{-4x^2-8}{(x+2)^2(x-1)^2} < 0 \quad \forall x \in D$$

per $x<-1$ la funzione è decrescente
per $-1<x<2$ la funzione è crescente
per $x>2$ la funzione è crescente

<u>Esn: 147 pag 232</u>

Fra tutti i rettangoli di perimetro $2p$, determinare quello avente la diagonale minima:

$$\begin{cases} d=\sqrt{x^2+(p-x)^2}=[2x^2+p^2-2px]^{\frac{1}{2}} \\ 0\leq x\leq p \end{cases}$$

$f(0)=p$
$f(p)=p\sqrt{2}$

$$d'=\frac{1}{2}[2x^2-2px+p^2]^{-\frac{1}{2}}\cdot(4x-2p)=\frac{4x-2p}{2\sqrt{2x^2-2px+p^2}}$$

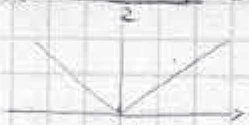
$$\frac{4x-2p}{2\sqrt{2x^2-2px+p^2}}\geq 0$$

$4x-2p\geq 0 \Rightarrow x\geq \frac{1}{2}p$

$2\sqrt{2x^2-2px+p^2}>0 \quad \forall x\in D$

$2x^2-2px+p^2>0$

$$x=\frac{p\pm\sqrt{p^2-2p^2}}{2}=\frac{p\pm\sqrt{-p^2}}{2}$$



Es. n. 271 Studiare la seguente funzione:

$y = \frac{x}{x^2+1}$ $\quad D = \mathbb{R}$

Comportamento della funzione agli estremi del dominio

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2+1} = \cancel{-\infty}$ $\quad \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$ $\quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2+1} = \cancel{+\infty}$ $\quad 0$

Punti d'incontro con gli assi cartesiani:

$O(0,0)$

Studio dell'andamento della funzione

$$\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \geq 0$$

$-x^2+1 \geq 0$

per $x < -1$ la $f(x)$ è decrescente

per $-1 < x < 1$ la $f(x)$ è crescente

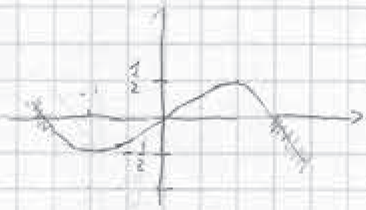
per $x > 1$ la $f(x)$ è decrescente

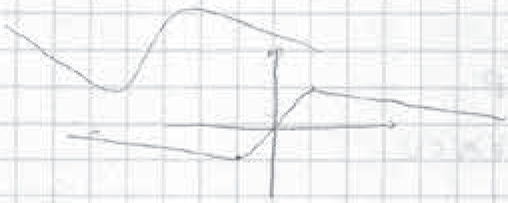
per $x = -1$ la $f(x)$ ha un ~~massimo~~ minimo relativo che vale

$f(-1) = -\frac{1}{2}$

per $x = 1$ la $f(x)$ ha un massimo relativo che vale:

$f(1) = \frac{1}{2}$





Es n. 243 pag 201 Studiare la seguente funzione

$$y=\frac{3x-1}{2x+1}$$

$$D=\{x\in\mathbb{R} \,/\, x\neq -\tfrac{1}{2}\} = (-\infty;-\tfrac{1}{2})\cup(-\tfrac{1}{2};+\infty)$$

Comportamento agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-1}{2x+1} = \frac{3-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^-} \frac{3x-1}{2x+1} = \frac{-\frac{3}{2}-1}{-0} = \frac{-\frac{5}{2}}{-0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^+} \frac{3x-1}{2x+1} = \frac{-\frac{5}{2}}{+0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{3}{2}$$

Incontro con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} y=\frac{3x-1}{2x+1} \\ y=0 \end{cases}$$

$$\frac{3x-1}{2x+1}=0$$

$$x=\frac{1}{3}$$

$A(\frac{1}{3},0)$

$$\begin{cases} y=\frac{3x-1}{2x+1} \\ x=0 \end{cases}$$

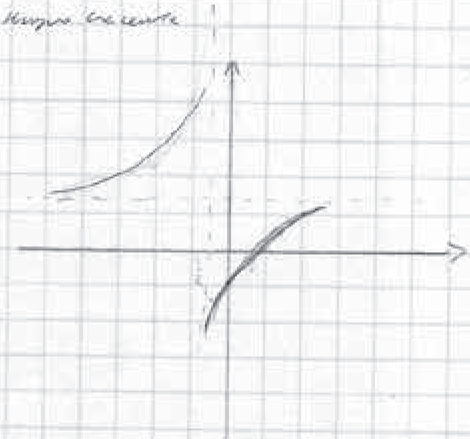
$y=-1$

$B(0,-1)$

Studio dell'andamento della funzione

$$y' = \frac{3(2x+1)-2(3x-1)}{(2x+1)^2} = \frac{6x+3-6x+2}{(2x+1)^2} = \frac{5}{(2x+1)^2} > 0 \ \forall x$$

la funzione è sempre crescente



Es n: 333 pag 802 Studiare le seguenti funzioni

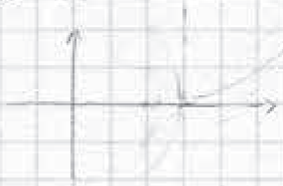
$y = \sqrt{x-3}$

$D = \{\forall x \in R / x \geq 3\} = [3; +\infty)$

Comportamento agli estremi del dominio:

$\lim_{x \to 3} \sqrt{x-3} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x-3} = +\infty$



Incontro con gli assi coordinati:

$\begin{cases} y = \sqrt{x-3} \\ y = 0 \end{cases}$

$\sqrt{x-3} = 0$

$x = 3$

$A(3; 0)$

Studio dell'andamento della funzione

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-3}} > 0 \ \forall x$

Es n: 313 pag 803 Studiare le seguenti funzioni

$y = 2x + \sqrt{5-x^2}$

$D = \{\forall x \in R / -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}\} = [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$

Punti d'incontro con gli assi cartesiani

$\begin{cases} y = 2x + \sqrt{5-x^2} \\ y = 0 \end{cases}$

$2x + \sqrt{5-x^2} = 0$

$\sqrt{5-x^2} = -2x$

$5 - x^2 = 4x^2$

$5x^2 = 5$

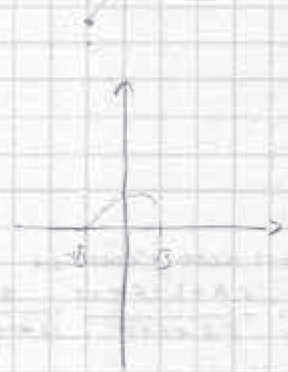
$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

$\begin{cases} y = 2x + \sqrt{5-x^2} \\ x = 0 \end{cases}$

$y = \sqrt{5}$

$A(-1, 0) \quad B(1, 0) \quad C(0, \sqrt{5})$



Studio dell'andamento della funzione

$y' = \cancel{4x}\ 2 - \dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}}$

$2 - \dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}} = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

$$y'' = \frac{x^2+x-5}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$$

$$y''_{x=-2} = \frac{+4-2-5}{8} = -\frac{5}{8}$$

per $x=-2$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f(-2) = -4+1 = -3$

$$y''_{x=2} = \frac{1}{8}$$ ~~top~~

per $x=2$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$f(2) = 5$

Esercizio: studiare la seg. funzione

$y = x^3-1$ eq. intera di 3° grado. La curva è di 3° ordine.

$D = (-\infty; +\infty)$

Comportamento agli estremi del dominio:

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3-1) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3-1) = +\infty$

Incontro con gli assi e segno della funzione:

$y = x^3-1$

$x^3-1 \geq 0$

$x^3 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$

$x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$ $\qquad A^3-B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$x^2+x+1=0$

$\Delta = 1-4 = -3$

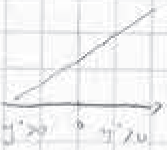
$A(1,0)$

$B(0,-1)$ siccome in B la derivata prima è nulla allora nel punto B si ha la tangente parallela all'asse x.

$y' = 3x^2$

per $x=0 \Rightarrow y'=0$

$\forall x \in R \neq 0 \Rightarrow y'>0$



Studio del segno della concavità della curva:

$y''=6x$

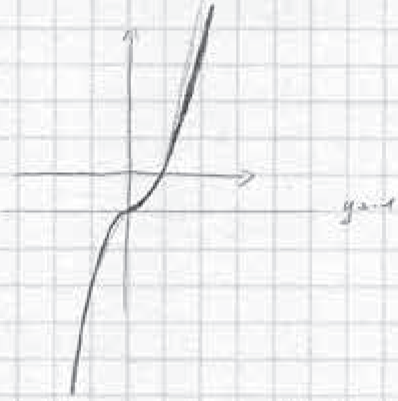
$6x>0$

$x>0$

per $x<0$ la curva ha una concavità negativa.

per $x>0$ la curva ha una concavità positiva

Quindi
per $x=0$ la curva ha un flesso.



$$\begin{cases} y = x^3 - 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$x^3 - 1 = -1$

$x^3 = 0$

$x \cdot x \cdot x = 0$

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Modo per trovare i flessi:
$y'' = 0 \Rightarrow x_1, x_2$
$y'''_{x_1} > 0 \Rightarrow$ concavità positiva

Es n: 217 pag 800 determinare i flessi e le tangenti stazionarie

$y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 5$

$y' = \frac{1}{2}x^2 + x - 1$

$y'' = x + 1$

Studio del segno della derivata seconda

$x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

per $x=-1$ la curva ha un flesso ascendente

$x = -1$

$y = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + 6 = \frac{19}{3}$

$m = y'_{x=-1} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$

$y = \frac{19}{3} - \frac{3}{2}(x+1)$ eq della tangente inflessionale.

Es n: 218 pag 800

$y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + 3$

$y' = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

$y'' = x^2 - 4x + 3$

Studio del segno della derivata seconda:

$x^2 - 4x + 3 \geq 0$

$x = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}$

La curva per $x=1$ ha un flesso discendente e per $x=3$ un flesso ascendente.

$$A \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{35}{12} \end{cases}$$

$m = y'_{x=1} = \frac{1}{3}$

3) $y = \frac{23}{12} + \frac{1}{3}(x-1)$ equazione della tangente inflessionale alla curva nel punto di flesso $B(1; \frac{35}{12})$

$$B\begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$m = y'_{x=3} = -1$

$y = \frac{9}{4} - x + 3$ equazione della tangente inflessionale alla curva nel punto di flesso $B(3; \frac{9}{4})$

Es n° 213, pag 806

$y = 3x^4 - 2x^2 + 5x$

$y' = 12x^3 - 4x + 5$

$y'' = 36x^2 - 4$

Studio del segno della derivata seconda:

$36x^2 - 4 \geq 0$

$9x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{3} \text{ et } x > \frac{1}{3}$

per $x = -\frac{1}{3}$ la curva ha un flesso discendente mentre per $x = \frac{1}{3}$ ha un flesso ascendente.

$$A\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{50}{27} \end{cases}$$

$m = y'_{x=-\frac{1}{3}} = \frac{53}{9}$

$y = -\frac{50}{27} + \frac{53}{9}(x + \frac{1}{3})$ eq. della tg. infl. alla curva nel punto $A(-\frac{1}{3}; -\frac{50}{27})$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{40}{27} \end{cases}$$

$m = \frac{37}{9}$

$y = \frac{40}{27} + \frac{37}{9}(x - \frac{1}{3})$ eq. della tg. infl. alla curva nel punto di flesso $B(\frac{1}{3}; \frac{40}{27})$

Es n = 220 pag 200

$y = x(x-1)^3$

$y' = (x-1)^3 + 3x(x-1)^2$

$y'' = 3(x-1)^2 + \cancel{}\ 3(x-1)^2 + 6x(x-1) = 3x^2 - 6x + 3 + 3x^2 - 6x + 3 + 6x^2 - 6x = 12x^2 - 18x + 6.$

$2x^2 - 3x + 1.$

$2x^2 - 3x + 1 \geq 0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$

la curva per $x = \frac{1}{2}$ ha un flesso discendente, per $x = 1$ un flesso ascendente.

$A \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{16} \end{cases}$

$m = \frac{1}{4}$

$y = -\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ eq. della tg. nel punto di flesso $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{16}\right)$

$B \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

$m = 0$

$y = 0$ eq. della tg. orizzontale alla curva nel punto di flesso $B(1,0)$ ed quindi all'asse x.

Es n: 221 pag 200

$y = \frac{x-1}{x^2+1}$

$y' = \frac{x^2+1-2x(x-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$

$y'' = \frac{(-2x+2)(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)\cdot 2x \cdot (-x^2+2x+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{+2x^5 - 6x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 6x + 2}{(x^2+1)^4}$ $(x = -1$

$= \frac{(x+1)(x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1)}{(x^2+1)^4} = 2(x+1)(x^2+1)(x^2-4x+1) \geq 0$

$x + 1 \geq 0$ per $x \geq -1$

$x^2 + 1 \geq 0 \quad \forall x$

$x^2 - 4x + 1 \geq 0 \quad x \leq 2 - \sqrt{3}$ et $x \geq 2 + \sqrt{3}$

$(x^2+1)^4 \geq 0 \quad \forall x$

per $x = -1$ la curva ha un flesso ascendente

$A \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

$m = -\frac{1}{2}$

$y = -1 - \frac{1}{2}(x+1)$

per $x = 2-\sqrt{3}$ la funzione ha un flesso discendente;

per $x = 2+\sqrt{3}$ la funzione ha un flesso ascendente.

Es n° 23 6 pag 50 Studiamo la seguente funzione

$y = (x-2)^2(x+1)$

$D = (-\infty; +\infty)$

$\lim_{x\to-\infty} [(x-2)^2(x+1)] = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} [(x-2)^2(x+1)] = +\infty$

Incontro con gli assi cartesiani e segno della funzione

$\begin{cases} y = (x-2)^2(x+1) \\ y = 0 \end{cases}$

$(x-2)^2(x+1) = 0$

$(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 2$

$x+1 = 0 \Rightarrow x_3 = -1$

$(x-2)^2(x+1) > 0$ per $x > -1$

$(x-2)^2(x+1) = 0$ per $x = -1$ et $x = 2$

$\begin{cases} y = (x-2)^2(x+1) \\ x = 0 \end{cases}$
$y = 4$

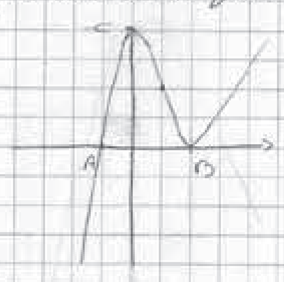
$A(-1,0)$ $B(2,0)$ $C(0,4)$

Studio del segno della concavità della curva:

$y'' = 6x - 6$

$6x - 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

per $x < 1$ la curva ha una concavità negativa
per $x > 1$ la curva ha una concavità positiva
per $x = 1$ la curva ha un flesso ascendente.



Es n° 231 pag 801

$y = \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2$ funzione razionale intera di 4° grado, la curva sarà una curva di ...

$D = (-\infty ; +\infty)$

$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2 \right) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2 \right) = +\infty$

Incontro con gli assi cartesiani:

$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2 \\ y = 0 \end{cases}$

$\frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2 = 0$

$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

$x^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \begin{cases} -4 \\ 1 \end{cases}$

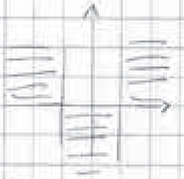
$x^2 = -4$ nessuna sol. reale

$x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1 \vee x_2 = 1$

$A(-1; 0)$ $B(1, 0)$ $C(0, -2)$

Segno della funzione:

$\frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 2 > 0 \Rightarrow x < -1 \vee x > 1$



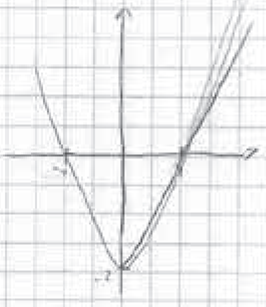
(~~Studio del~~) Segno della concavità della curva:

$y' = 6x^2 + 3$

$6x^2 + 3 > 0$

$2x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in R$

la curva hanno concavità positiva. ($\smile$)



33 Es n = 255 pag 801 Studiare la seguente funzione

$y = \frac{5x^2+1}{2x}$ funzione razionale fratta

$D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^2+1}{2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5+\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x}} = -\infty \quad (1)$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{5x^2+1}{2x} = -\infty \quad (2)$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{5x^2+1}{2x} = +\infty \quad (3)$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2+1}{2x} = +\infty \quad (4)$

Dalla (1) e dalla (4) si ricava che la curva ha un asintoto obliquo.

Dalla (2) e dalla (3) si ricava che la curva ha un asintoto verticale di equazione:

$x = 0$

Trovo l'equazione dell'asintoto obliquo:

$y = mx + q$

$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$

$m = \lim_{x \to \infty} \frac{5x^2+1}{2x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{5+\frac{1}{x^2}}{2} = \frac{5}{2}$

$m = \frac{5}{2}$

$q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$

$q = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{5x^2+1}{2x} - \frac{5}{2}x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{5x^2+1-5x^2}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2x} = 0$

$y = \frac{5}{2}x$ eq. dell'asintoto obliquo della curva.

Incontro con gli assi cartesiani:

$\begin{cases} y = \frac{5x^2+1}{2x} \\ y = 0 \end{cases}$

$\frac{5x^2+1}{2x} = 0$

La curva non interseca gli assi cartesiani

Studio dell'andamento della funzione:

$y' = \frac{20x^2 - 2(5x^2+1)}{4x^2} = \frac{10x^2-2}{4x^2} = \frac{5x^2-1}{2x^2}$

$\frac{5x^2-1}{2x^2} \geq 0$

$5x^2-1 \geq 0$ per $x<-\frac{\sqrt5}{5}$ et $x \geq \frac{\sqrt5}{5}$

$2x^2>0 \quad \forall x \in \mathbb{D}$

per $x<-\frac{\sqrt5}{5}$ la funzione cresce

per $x=-\frac{\sqrt5}{5}$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f\left(-\frac{\sqrt5}{5}\right) = \frac{1+1}{-\frac{2}{5}\sqrt5} = -\frac{2}{\frac{2}{5}\sqrt5} = -\frac{5}{\sqrt5} = -\frac{5\sqrt5}{5} = -\sqrt5$

per $-\frac{\sqrt5}{5}<x<\frac{\sqrt5}{5}$ la funzione decresce

per $x=\frac{\sqrt5}{5}$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$f\left(\frac{\sqrt5}{5}\right) = \frac{2}{\frac{2\sqrt5}{5}} = \frac{5}{\sqrt5} = \sqrt5$

$y'' = \frac{20x^3-4x(5x^2-1)}{4x^4} = \frac{20x^3-20x^3+4x}{4x^4} = \frac{1}{x^3}$

$\frac{1}{x^3}=0$ mai

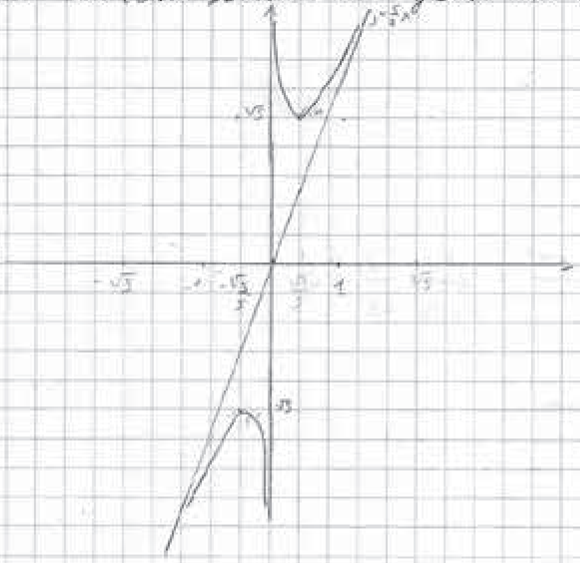
La funzione non ha punti di flesso.

$\frac{1}{x^3}>0 \Rightarrow x>0$

per $x>0$ la curva ha una concavità positiva

per $x<0$ la curva ha una concavità negativa.

Poiché non ci sono punti di flesso la curva rimane una retta.



34 Es n. 258 pag 301 Studiare la seguente funzione

$y = \frac{4-x^2}{8+2x}$ funzione razionale fratta

$D = (-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{4-x^2}{8+2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{4}{x^2}-1}{\frac{8}{x^2}+\frac{2}{x}} = -\infty$

$\lim_{x\to-4^-} \frac{4-x^2}{8+2x} = \lim_{x\to-4} \frac{-12}{+0} = -\infty$

$\lim_{x\to-4^+} \frac{4-x^2}{8+2x} = \frac{-12}{-0} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{4-x^2}{8+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{4}{x^2}-1}{\frac{8}{x^2}+\frac{2}{x}} = -\infty$

Lo vuoto ho un asintoto obliquo e un asintoto verticale di eq $x=-4$

Trovo l'equazione dell'asintoto obliquo:

$y = mx + q$

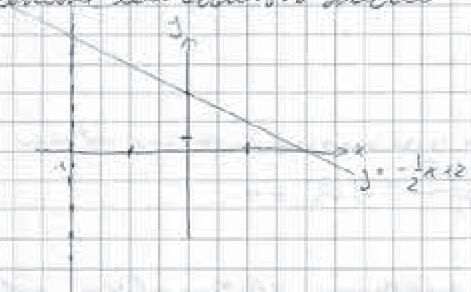
$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{4-x^2}{8x+2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4}{x^2}-1}{\frac{8}{x}+2} = -\frac{1}{2}$

$q = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$

$q = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4-x^2}{8+2x} + \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4-x^2+4x+x^2}{8+2x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+4}{8+2x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+2}{4+x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{2}{x}}{1+\frac{4}{x}} = 2$

$y = -\frac{1}{2}x + 2$ equazione dell'asintoto obliquo



Incontro con gli assi cartesiani e segno della funzione:

$\begin{cases} y = \frac{4-x^2}{8+2x} \\ y = 0 \end{cases}$

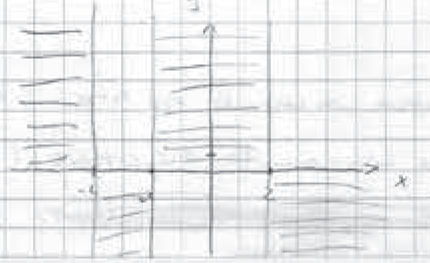
$\frac{4-x^2}{8+2x} \geq 0$

$\frac{4-x^2}{8+2x} = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

$\frac{4-x^2}{8+2x} > 0$

$4-x^2 > 0$ per $-2 < x < 2$

$8+2x > 0$ per $x > -4$



Punti d'incontro con gli assi cartesiani:

$A(-2,0)$; $B(2,0)$; $C(0,\frac{1}{2})$

Studio dell'andamento della funzione:

$$y' = \frac{-2x(8+2x) - 2(4-x^2)}{(8+2x)^2} = \frac{-16x-4x^2-8+2x^2}{64+32x+4x^2} = \frac{-2x^2-16x-8}{64+32x+4x^2} = \frac{-x^2-8x-4}{2x^2+16x+32}$$

$$\frac{-x^2-8x-4}{2x^2+16x+32} \geq 0$$

$-x^2-8x-4 \geq 0$

$x^2+8x+4 \leq 0$

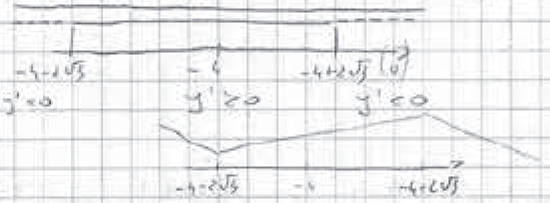
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{1} = -4 \pm 2\sqrt{3}$$

$x^2+8x+4 \leq 0$ per $-4-2\sqrt{3} < x < -4+2\sqrt{3}$

$2x^2+16x+32 > 0$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = -4$$

$2x^2+16x+32 > 0 \ \forall x \in D - \{-4\}$ $\neq -4$



per $x < -4-2\sqrt{3}$ la funzione decresce

per $-4-2\sqrt{3} < x < -4+2\sqrt{3}$ la funzione cresce

per $x > -4+2\sqrt{3}$ la funzione cresce

Quindi

per $x = -4-2\sqrt{3}$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$$f(-4-2\sqrt{3}) = \cancel{\frac{8\sqrt{3}+12}{4\sqrt{3}}} = \cancel{\frac{3+4\sqrt{3}}{3}} = \frac{24-16\sqrt{3}}{-4\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}+4$$

per $x = -4+2\sqrt{3}$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$$f(-4+2\sqrt{3}) = \frac{-24+16\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 4-2\sqrt{3}$$

$$y'' = \cancel{48x} \frac{-48x-192}{(x+4)^4}$$

$$\frac{-48x-192}{(x+4)^4} > 0$$

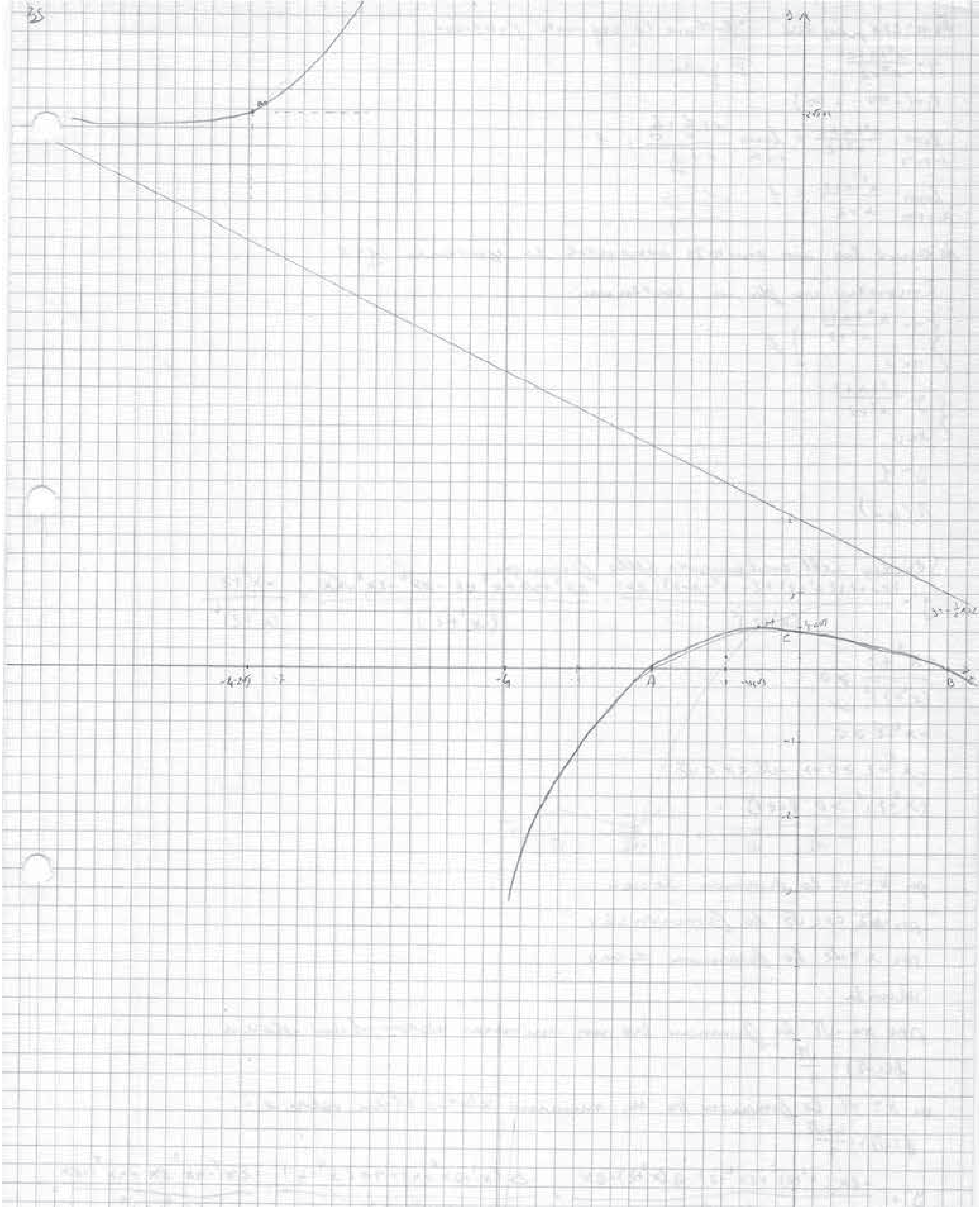
$-48x-192 \geq 0 \Rightarrow x \leq -4$

$(x+4)^4 > 0 \ \forall x \in D$

Per $x<-4$ la funzione ha concavità positiva (∪)

per $x>-4$ la funzione ha concavità negativa (∩)

~~per x ... la funzione ha un flesso ...~~


A
B
C

Es n° 275 pag 802 Studiare la seguente funzione:

$$y = \frac{x^2+x+2}{x^2+2}$$ III parte

$D = (-\infty ; +\infty)$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+x+2}{x^2+2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x+2}{x^2+2} = \underline{1}$$

La curva ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 1$

Incontro con gli assi cartesiani:

$$\left\{\begin{array}{l} y = \frac{x^2+x+2}{x^2+2} \\ y = 0 \end{array}\right\} \emptyset$$

$$\left\{\begin{array}{l} y = \frac{x^2+x+2}{x^2+2} \\ x = 0 \end{array}\right.$$

$y = 1$

$A(0,1)$

Studio dell'andamento della funzione

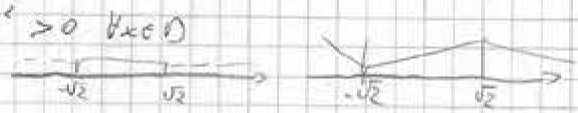
$$y' = \frac{(2x+1)(x^2+2)+(-x^2-x-2)(2x)}{(x^2+2)^2} = \frac{2x^3+4x+x^2+2-\cancel{2x^3}-2x^2-\cancel{4x}}{(x^2+2)^2} = \frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2}$$

$$\frac{-x^2+2}{(x^2+2)^2} \geq 0$$

$-x^2+2 \geq 0$

$x^2-2 \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

$(x^2+2)^2 > 0 \quad \forall x \in D$



per $x < -\sqrt{2}$ la funzione decresce

per $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ la funzione cresce

per $x > \sqrt{2}$ la funzione decresce

Quindi:

per $x = -\sqrt{2}$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$$f(-\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

per $x = \sqrt{2}$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$$f(\sqrt{2}) = \frac{4+\sqrt{2}}{4}$$

$$y'' = \frac{-2x(x^2+2)^2+(x^2-2)\cdot 2(x^2+2)\cdot 2x}{(x^2+2)^4} = \frac{-2x(x^4+2x^2+4)+4x(x^4-4)}{(x^2+2)^4} = \frac{-2x^5-4x^3-8x+4x^5-16x}{(x^2+2)^4} =$$

$$= \frac{2x^5-4x^3-24x}{(x^2+2)^4} = \frac{2x(x^4-2x^2-12)}{(x^2+2)^4}$$

$$\frac{2x(x^4-2x^2-12)}{(x^2+2)^4} \geq 0$$

36

$<x\geq 0 \Rightarrow x\geq 0$

$x^4 - 2x^2 - 12 \geq 0$

$x^2 = 1 \pm \sqrt{1+12} = 1 \pm \sqrt{13}$ $\begin{cases} 1-\sqrt{13} \\ 1+\sqrt{13} \end{cases}$

$x = \pm\sqrt{1+\sqrt{13}}$

$x = \sqrt{1-\sqrt{13}}$

$x = -\sqrt{1+\sqrt{13}}$

$x = \sqrt{1+\sqrt{13}}$

$x = -\sqrt{1+\sqrt{13}}$

Es n = 277 pag 802 Studiare la seguente funzione

$$y = \frac{x^2+7x+10}{x-1}$$

funzione razionale fratta di 2° grado $\left[xy - y = x^2+7x+10 \right]$ (2° grado)
curva di 2° ordine (parabola ellisse o iperbole)
Sappiamo che $x-1$ è un asintoto, la curva è un'iperbole

$D = (-\infty; +1) \cup (1; +\infty)$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+7x+10}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{0} = (\infty) \quad \frac{x+7+\frac{10}{x}}{1-\frac{1}{x}} = -\infty$$

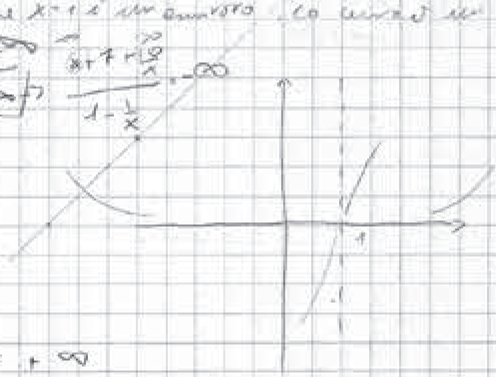
$x \frac{\infty}{\infty}$ numeratore maggiore del denominatore ∞

$x \frac{\infty}{\infty}$ numeratore e denominatore dello stesso grado 0

$$\lim_{x\to1^-} \frac{x^2+7x+10}{x-1} = \frac{18}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{x^2+7x+10}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+7x+10}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = +\infty$$



Esercizio

La curva ha un asintoto verticale di equazione $x=1$ e un asintoto obliquo:

$y = mx + q$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + c}{5x^n + 6x^{n-1} + \dots + c} = \quad 0 + \frac{6}{x} + \dots$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+7x+10}{x^2-x} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$ del teorema di limite, l'inferiore

Al caso di limiti hanno lo stesso grado e $x\to\infty$ il limite è il rapporto dei coefficienti di grado massimo

$$q = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - mx \right] =$$

$$q = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+7x+10}{x-1} - 1x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+7x+10-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{8x+10}{x-1} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{8+\frac{10}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{8}{1}$$

$y = x + 8$ eq dell'asintoto obliquo (i 2 limiti devono entrambi esistere ed essere finiti)

Incontro con gli assi cartesiani e studio del segno della funzione

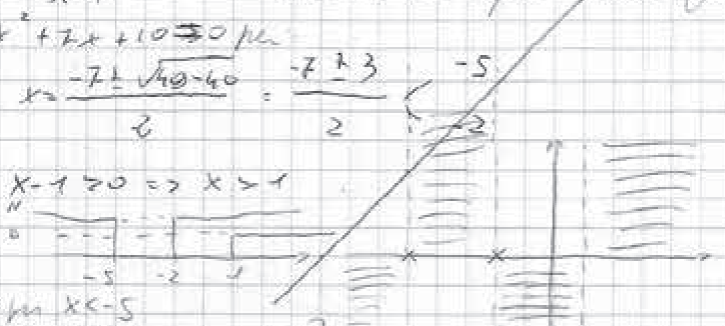
$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2+7x+10}{x-1} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{x^2+7x+10}{x-1} \geq 0$$ Studio del segno della funzione

$x^2+7x+10 \geq 0$ per

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{-7 \pm 3}{2} \quad \begin{matrix} -5 \\ -2 \end{matrix}$$

$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$



$f(x) < 0$ per $x < -5$
$f(x) = 0$ per $x = -5$
$f(x) > 0$ per $-5 < x < -2$
$A(-5;0)$ $B(-2;0)$ $C(0;-10)$
$f(x) = 0$ per $x = -2$
$f(x) < 0$ per $-2 < x < 1$
$f(x) > 0$ per $x > 1$

Studio dell'andamento della funzione:

$$y' = \frac{(2x+7)(x-1)+(-x^2-7x-10)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x+7x-7-x^2-7x-10}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-17}{(x-1)^2}$$

$$\frac{x^2-2x-17}{(x-1)^2} \geq 0$$

$$x^2-2x-17 \geq 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1+17} = 1 \pm 3\sqrt{2}$$

$$(x-1)^2 > 0 \quad \forall x \in D$$

per $x < 1-3\sqrt{2}$ la funzione cresce

per $1-3\sqrt{2} < x < 1+3\sqrt{2}$ la funzione decresce

per $x > 1+3\sqrt{2}$ la funzione cresce

Quindi:

per $x = 1-3\sqrt{2}$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$$f(1-3\sqrt{2}) = \frac{36-27\sqrt{2}}{-3\sqrt{2}} = 9-6\sqrt{2} \quad (y=0,5) \quad (x=-3,2)$$

per $x = 1+3\sqrt{2}$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

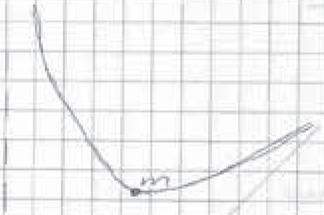
$$f(1+3\sqrt{2}) = \frac{36+27\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}+9 \quad [y=17,5] \quad (x=5,2)$$

$$y'' = \frac{(2x-2)(x-1)^2+(-x^2+2x+17)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(2x-2)(x^2-2x+1)+2(-x^3+x^2+2x^2-2x+17x-17)}{(x-1)^4} =$$

$$\frac{2x^3-4x^2+2x-2x^2+4x-2-2x^3+2x^2+4x^2-4x+34x-34}{(x-1)^4} = \frac{36x-36}{(x-1)^4}$$

$$\frac{36x-36}{(x-1)^4} \geq 0$$

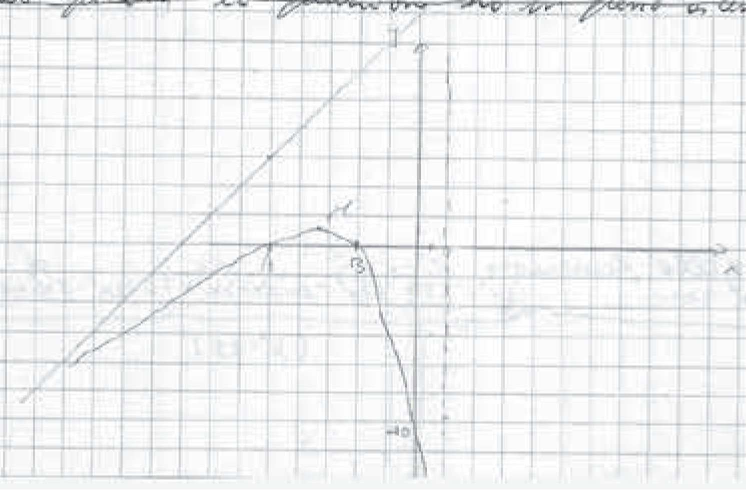
$$36x-36 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$



la funzione per $x<1$ ha una concavità negativa

la funzione per $x>1$ ha una concavità positiva

~~Quindi per x=1 la funzione ha un flesso ascendente~~



Es. n. 300 pag 802   Studiare la seguente funzione

$$y = \frac{x^3+4x^2-3x+1}{(x+5)(x-5)}$$

funzione razionale fratta di 3° grado. La curva sarà di 3° ordine

$D = (-\infty; -5) \cup (-5; +5) \cup (+5; +\infty)$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+4x^2-3x+1}{x^2-25} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{25}{x^2}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-5^-} \frac{x^3+4x^2-3x+1}{x^2-25} = \frac{-39}{-0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-5^+} \frac{x^3+4x^2-3x+1}{x^2-25} = \frac{-39}{+0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to5^-} \frac{x^3+4x^2-3x+1}{x^2-25} = \frac{211}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to5^+} \frac{x^3+4x^2-3x+1}{x^2-25} = \frac{211}{+0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+4x^2-3x+1}{x^2-25} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{25}{x^2}} = +\infty$$

La curva ha due asintoti verticali, uno di equazione $x=-5$ e l'uno di equazione $x=5$ e un asintoto obliquo. Trovo l'equazione dell'asintoto obliquo

$$\frac{x^3+4x^2-3x+1}{x^3-25x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4x^2-3x+1}{x^3-25x} = 1$$

$y = mx+q$ eq. generica

$m = 1$

$$\frac{x^3+4x^2-3x+1}{x^2-25} - x = \frac{4x^2+22x+1}{x^2-25}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+22x+1}{x^2-25} = 4$$

$y = x+4$ eq. dell'asintoto obliquo

Incontro con gli assi cartesiani e segno della funzione

$$\frac{x^3+4x^2-3x+1}{(x+5)(x-5)} \geq 0$$

$$\frac{x^3+4x^2-3x+1}{(x+5)(x-5)} = 0$$

$x^3+4x^2-3x+1 = 0$ ...

$A\left(0, -\frac{1}{25}\right)$

Studio dell'andamento della funzione

$$y' = \frac{(3x^2+8x-3)(x^2-25)-2x(x^3+4x^2-3x+1)}{(x^2-25)^2} = \frac{3x^4-75x^2+8x^3-200x-3x^2+75-2x^4-8x^3+6x^2-2x}{(x^2-25)^2} =$$

$$= \frac{x^4-72x^2-202x+75}{(x^2-25)^2}$$

STOP

77

Es n: 231 pag 802 Studiare le seguenti funzioni

$y = \frac{x^3-1}{x^2}$ funzione razionale fratta di terzo grado con lo zero reale di terzo ordine

$D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3-1}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - \frac{1}{x^2}}{1} = -\infty$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^3-1}{x^2} = -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^3-1}{x^2} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3-1}{x^2} = +\infty$

La funzione ha un asintoto vert. di eq $x=0$ e ha un asintoto obliquo. Trovo l'equazione di questo:

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3-1}{x^3} = 1$

$m = 1$

$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3-1}{x^2} - x \right) = \lim_{x \to \infty} -\frac{1}{x^2} = 0$

$n = 0$

$y = mx + n$

$y = x$

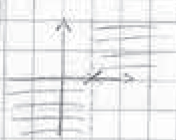
Incontro con gli assi cartesiani:

$\begin{cases} y = \frac{x^3-1}{x^2} \\ y = 0 \end{cases}$

$\frac{x^3-1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1$ $A(1,0)$

Segno della funzione:

$\frac{x^3-1}{x^2} > 0$



$x^3 - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

Studio dell'andamento della funzione

$y' = \frac{(3x^2 \cancel{-1}) \cdot x^2 - 2x(x^3-1)}{x^4} = \frac{3x^4 \cancel{-3x^3} - 2x^4 + 2x}{x^4} = \frac{x^4 \cancel{-3x^3} + 2x}{x^4} = \frac{x(x-1)(x^2+\cancel{x}-2)}{x^4}$

$\frac{x(x-1)(x^2+x-2)}{x^4} \geq 0$

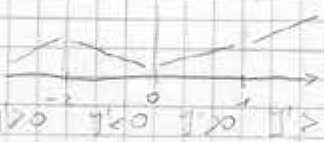
$x(x-1)(x^2+x-2) \geq 0$

$\boxed{x \geq 0 \text{ per } x \geq 0}$

$x - 1 \geq 0$ per $x \geq 1$

$x^2 + x - 2 \geq 0$ per $x < -2$ et $x \geq 1$

$x = \frac{-1 \pm 3}{2} < \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix}$



$y' > 0$ $y' < 0$ $y' > 0$ $y' > 0$

per $x<-2$ la funzione cresce

per $-2<x<0$ la funzione decresce

per $x>0$ la funzione cresce

per $x=-2$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$$f(-2) = -\frac{9}{4}$$

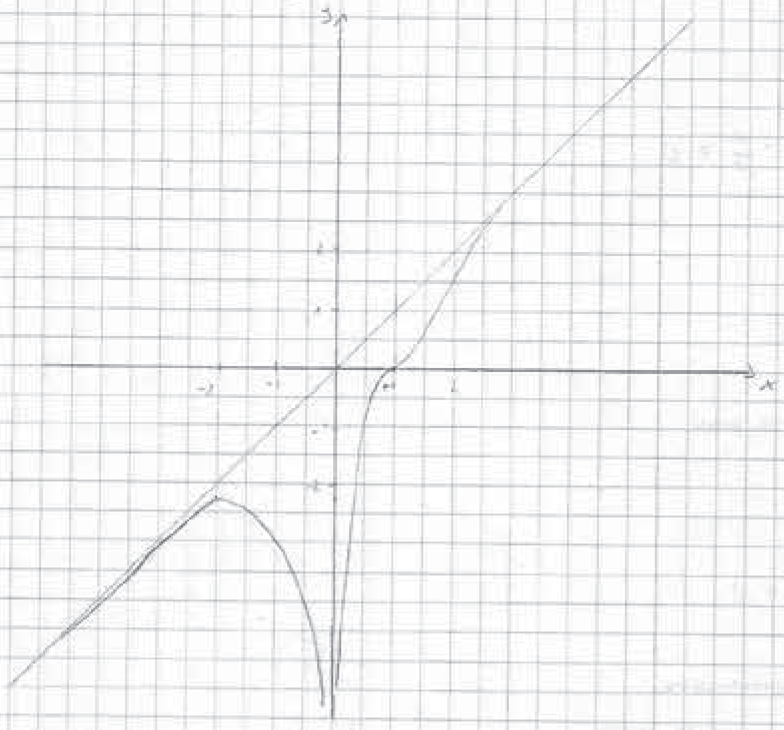
$$y'' = \frac{(4x^3-6x+2)\cdot x^4 - 4x^3(x^4-3x^2+2x)}{x^8} = \frac{6x^5-6x^4}{x^8} = \frac{x-1}{x^4}$$

$$\frac{x-1}{x^4} \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

per $x<1$ la funzione ha una concavità negativa ($\frown$)

per $x>1$ la funzione ha una concavità positiva ($\smile$)

per $x=1$ la funzione ha un flesso ascendente)



38 Es n° 331 pag 802 Studiare la seguente funzione

$y = \sqrt{x-3}$

$D = [3 ; +\infty)$

$\lim_{x \to 3} \sqrt{x-3} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x-3} = +\infty$

Incontro con gli assi cartesiani

$\begin{cases} y = \sqrt{x-3} \\ y = 0 \end{cases}$

$\sqrt{x-3} = 0 \Rightarrow x = 3$

$A(3;0)$

Segno della funzione

$\sqrt{x-3} > 0 \Rightarrow x > 3$

Studio dell'andamento della funzione:

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$

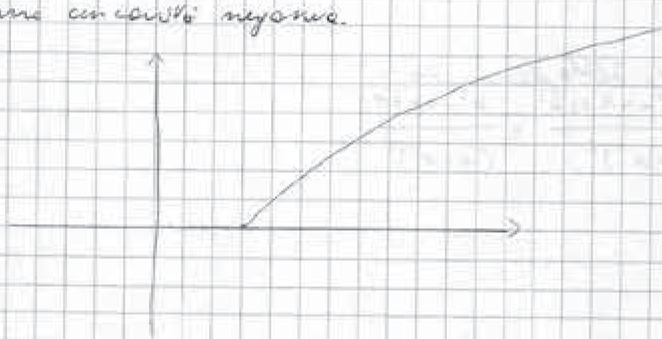
$y' > 0 \ \forall x \in D - \{3\}$

la funzione cresce sempre.

$y'' = -\frac{4(x-3)}{\sqrt{x-3}}$

$y'' < 0 \ \forall x \in D - \{3\}$

la funzione ha concavità negativa.



Es n=335 pag 803 Studiare la seguente funzione

$$y=\sqrt{\frac{x-2}{1-x^2}}$$

$$\frac{x-2}{1-x^2}\geq 0$$

$x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2$

$1-x^2>0 \Rightarrow -1<x<1$

$D=(-\infty;-1)\cup(1;2]$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x-2}{1-x^2}}=0$$

$$\lim_{x\to-1}\sqrt{\frac{x-2}{1-x^2}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to1}\sqrt{\frac{x-2}{1-x^2}}=+\infty$$

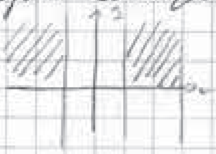
Incontro con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} y=\sqrt{\frac{x-2}{1-x^2}} \\ y=0 \end{cases}$$

$x=2$

$A(2,0)$

Segno della funzione:



Studio dell'andamento della funzione

$$y'=\frac{1-x^2+(2-x)\cdot-2x}{(1-x^2)^2}=\frac{1-x^2-4x+2x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{x^2-4x+1}{(1-x^2)^2}$$

$$\frac{x^2-4x+1}{(1-x^2)^2}\geq 0$$

$x^2-4x+1\geq 0$

$x=2\pm\sqrt{4-1}=2\pm\sqrt{3}$

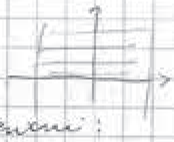
5.5

$$y'' = \frac{-2x^5+12x^4-4x^3-8x^2+2x}{(1-x^2)^4}$$

Esercizio: Studiare la seguente funzione.

$y=\sqrt{4-x^2}$

$D=[-2,2]$



$f(x)=f(-x)$ $\quad$ $x=1$, $y=\sqrt{3}$ $\quad$ $x=-1$, $y=\sqrt{3}$ $\quad$ $x\to -x$, $y\to y$

la funzione è simmetrica rispetto all'asse y

Incontro con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} y=\sqrt{4-x^2} \\ y=0 \end{cases}$$

$x=\pm 2$

$A(-2,0)$ $B(2,0)$

$C=(0,2)$ $D(0,-2)$

Studio dell'andamento della funzione

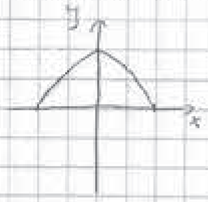
$y'=-2x$ (per $x<0$ la f. cresce, per $x>0$ la f. decresce)

per $x=0$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f(0)=2$

$y''=-2$

la funzione ha una concavità negativa ($\cap$)



40 Es n. 285 pag 802   Studiare la seguente funzione

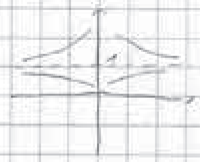
$$y=\frac{x^2+1}{x^2-2x+2}$$

$x^2-2x+2=0$

$x=1\pm\sqrt{1-2}$ $\Delta<0 \Rightarrow x^2-2x+2>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$D=(-\infty,+\infty)$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2-2x+2}=1$$



$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2-2x+2}=1$$

Incontro con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2+1}{x^2-2x+2} \\ y=0 \end{cases} \not\exists\ \emptyset$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2+1}{x^2-2x+2} \\ x=0 \end{cases}$$

$y=\frac{1}{2}$

$A(0;\frac{1}{2})$

Segno della funzione

$f(x)>0\ \forall x\in D$

Studio dell'andamento della funzione:

$$y'=\frac{2x(x^2-2x+2)+(-x^2-1)(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}=\frac{2x^3-4x^2+4x-2x^3+2x^2-2x+2}{(x^2-2x+2)^2}=\frac{-2x^2+2x+2}{(x^2-2x+2)^2}\geq 0$$

$-2x^2+2x+2\geq 0$

$2x^2-2x-2\leq 0$

$x=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leq x\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

per $x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ la funzione decresce

per $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ la funzione cresce

per $x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Quindi:

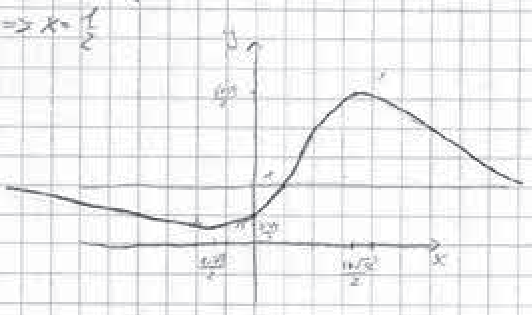
per $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$$f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}+1}{\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}-1+\sqrt{5}}=\cancel{4}\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

per $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$$f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}+1}{\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}-1-\sqrt{5}+2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

per $f(x)=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$



Es n° 288 pag 802 Studiare la seguente funzione

$$y=\frac{x^2-4x+4}{x^2-1}$$

$D=(-\infty,-1)\cup(-1,+1)\cup(+1,+\infty)$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x+4}{x^2-1}=\frac{1}{1}$$

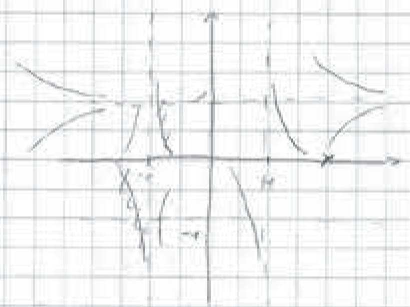
$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2-4x+4}{x^2-1}=\frac{9}{+0}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2-4x+4}{x^2-1}=\frac{9}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-4x+4}{x^2-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-4x+4}{x^2-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+4}{x^2-1}=\cancel{\infty}\ \frac{1}{1}$$



* Dal fatto che il D si annulla per $x=\pm1$ si hanno due asintoti verticali e un quindi per $x=-1$ e $x=1$

Incontro con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} y=\frac{x^2-4x+4}{x^2-1} \\ y=0 \end{cases}$$

$$\frac{x^2-4x+4}{x^2-1}=0$$

$x^2-4x+4=0 \Rightarrow x_1=x_2=+2$ punto di tangenza

$A(2,0)\quad B(0,-4)$

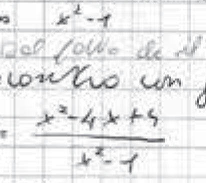
* Segno della funzione:

$$\frac{x^2-4x+4}{x^2-1}>0$$

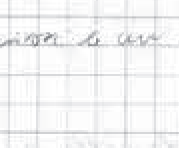
$x^2-4x+4>0\ \forall x \in D-\{2\}\ \neq 2$

$(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$ doppia $\Rightarrow$ la curva incontra l'asse x nel punto $A(2,0)$ ed è ivi tangente all'asse x

$x^2-1>0$ per $x<-1$ et $x>1$



la $f(x)$ per $x<-1$ è positiva
la $f(x)$ per $-1<x<1$ è negativa
la $f(x)$ per $x>1$ è positiva
la $f(x)$ per $x=2$ si annulla



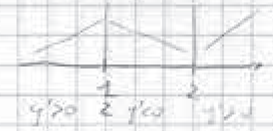
Studio dell'andamento della funzione:

$$y'=\frac{(2x-4)(x^2-1)+(-x^2+4x-4)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^3-2x-4x^2+4-\cancel{2x^3}+8x^2-8x}{(x^2-1)^2}=\frac{4x^2-10x+4}{(x^2-1)^2}\boxed{\geq 0}$$

Studio il segno del numeratore

$4x^2-10x+4\geq0$

$x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm3}{4}<^{2}_{\frac{1}{2}}$



per $x<\frac{1}{2}$ la funzione è crescente

per $\frac{1}{2}<x<2$ la funzione è decrescente

per $x>2$ la funzione è crescente

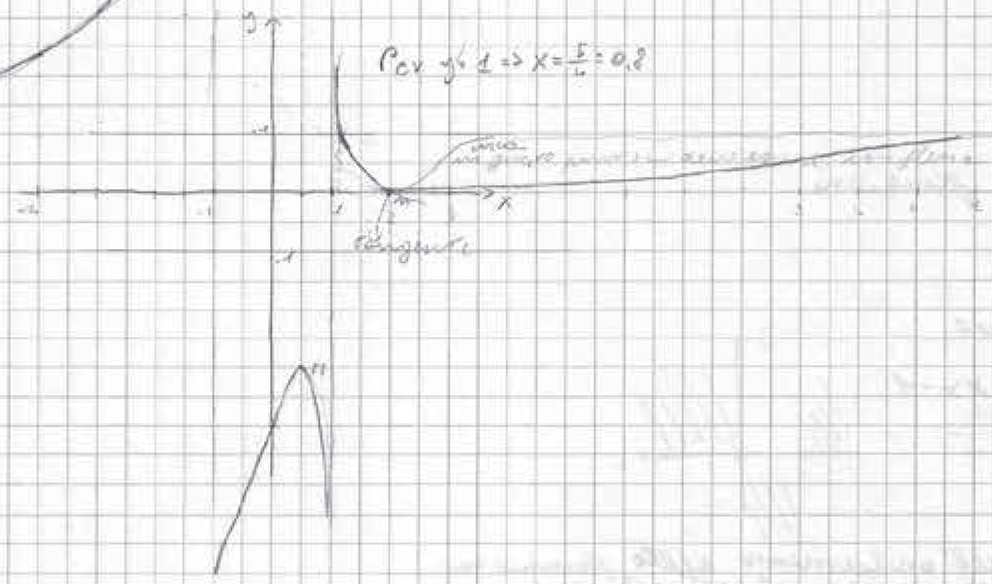
Quindi:

per $x = \frac{1}{2}$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f(\frac{1}{2}) = -3$

per $x=2$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$f(2)=0$



(Il grado di una curva è il numero massimo di ... che la curva può avere)

Dal grafico si deduce che la curva ha un flesso, in questo caso discendente.

Se la prima derivata che non si annulla è di ordine pari in quel punto, ha una concavità positiva se è di ordine dispari è negativa se ha in quel punto un flesso discendente.

In qualunque funzione se la x compare solo di grado pari allora la curva è simmetrica rispetto all'asse y.

Es n: 236 pag 802 Studiare la seguente funzione

$$y = \frac{x^3}{1+x^3}$$

$D = (-\infty \; -1) \cup (-1 \; +\infty)$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^3}{1+x^3} = \frac{-1}{-0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^3}{1+x^3} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{1+x^3} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{1+x^3} = 1$$

Incontro con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^3}{1+x^3} \\ y = 0 \end{cases}$$

$x = 0$

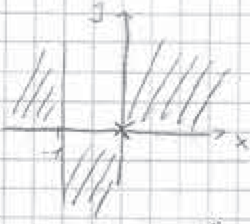
$O(0,0)$

Segno della funzione:

$$\frac{x^3}{1+x^3} > 0$$

$x^3 > 0$ per $x > 0$

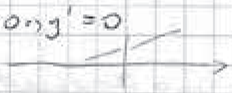
$x^3 + 1 > 0$ per $x > -1$

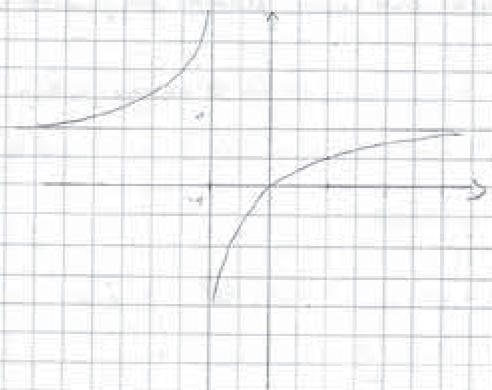


Studio dell'andamento della funzione:

$$y' = \frac{3x^2(1+x^3) - x^3 \cdot 3x^2}{(1+x^3)^2} = \frac{3x^2 + 3x^5 - 3x^5}{(1+x^3)^2} = \frac{3x^2}{(1+x^3)^2} > 0 \text{ per } \forall x \in D$$

per $x = 0 \rightarrow y' = 0$





42 Es n: 336 pag 803   Studiare la seguente funzione

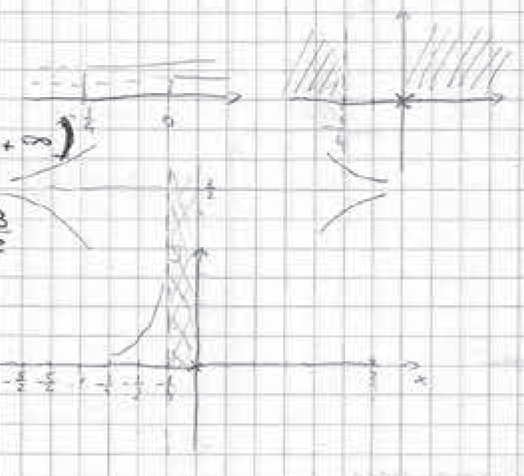
$y = \sqrt{\frac{9x}{1+4x}}$

$\frac{9x}{1+4x} \geq 0$

$9x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$1+4x > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{4}$

$D = \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup \left[0, +\infty\right)$



$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{9x}{1+4x}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

$\lim_{x \to -\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{9x}{1+4x}} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{9x}{1+4x}} = \frac{3}{2}$

Incontro con gli assi cartesiani:

$O(0,0)$

Studio dell'andamento della funzione:

$y' = \frac{9(1+4x) - 9x \cdot 4}{(1+4x)^2} = \frac{9+36x-36x}{(1+4x)^2} = \frac{9}{(1+4x)^2} > 0 \quad \forall x \in D$

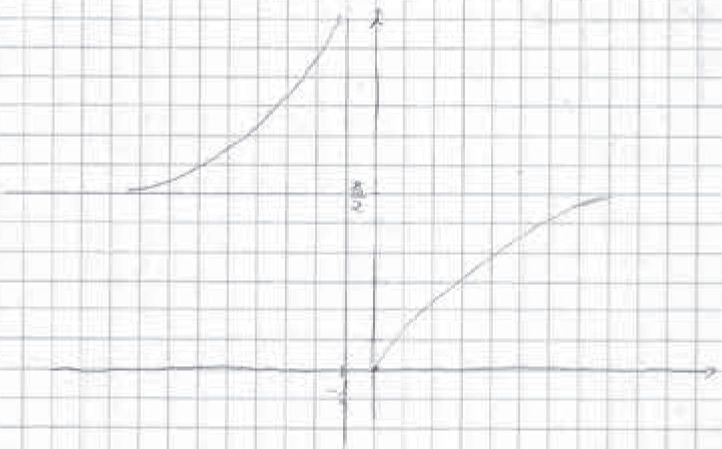
La funzione cresce costantemente.

$y'' = \frac{-9 \cdot 2(1+4x) \cdot 4}{(1+4x)^4} = \frac{-72(1+4x)}{(1+4x)^4} \geq 0$

$1+4x < 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{4}$

per $x < -\frac{1}{4}$ $y'' > 0 \Rightarrow$ la funzione ha una concavità positiva ($\cup$)

per $x > -\frac{1}{4}$ la funzione ha una concavità negativa ($\cap$)



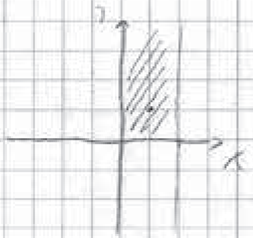
Es n. 342 pag 803 Studiare la seguente funzione

$y=\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$

$\dfrac{x}{2-x}\geq 0$

$x\geq 0$

$2-x>0 \Rightarrow x<2$



$D=[0,2)$

$\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}=+\infty$

Incontro con gli assi cartesiani:

$O(0,0)$

Studio dell'andamento della funzione:

$y'=\dfrac{2-x+x}{(2-x)^2}=\dfrac{2}{(2-x)^2}>0\ \forall x\in D$

La funzione cresce sempre

$y''=\dfrac{-2\cdot 2(2-x)\cdot -1}{(2-x)^2}=\dfrac{4(2-x)}{(2-x)^2}>0$

$y''>0 \Rightarrow x<2$

per $x<2$ la funzione ha una concavità positiva (⌣)

43

Es n: 275 pag 802 Studiare la seguente funzione

$$y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

funzione razionale fratta di II grado. Il grafico sarà una curva di II grado.
La curva è simmetrica rispetto all'asse y ($x \to -x$ et $y \to y$)

$x^2-1 > 0 \Rightarrow x < -1$ et $x > 1$

$D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$

$\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = +\infty$

Incontro con gli assi cartesiani:

$A(0, -1)$

Studio dell'andamento della funzione:

$$y' = \frac{2x(x^2-1)+(-x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2} > 0$$

$y' > 0 \Rightarrow x < 0$

per $x<0$ la funzione cresce

per $x>0$ la funzione cresce

per $x=0$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f(0) = -1$

$$y'' = \frac{-4(x^2-1)^2+16x^2(x^2-1)}{(x^2-1)^4} = \frac{3x^4-2x^2-1}{(x^2-1)^4} > 0$$

$$x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{3} = \frac{1 \pm 2}{3} \begin{cases} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{cases}$$

$x^2 = -\frac{1}{3}$ n.s.R

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$y'' > 0$ per $x < 1$ et $x > 1$

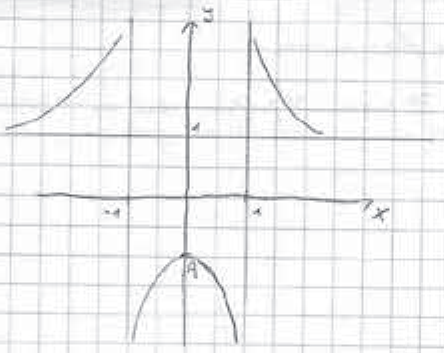
$y'' < 0$ per $-1 < x < 1$

$y'' = 0$ non è definita nel dominio.

Quindi:

per $x<-1$ et $x>1$ la funzione ha una concavità positiva ($\cup$)

per $-1<x<1$ la funzione ha una concavità negativa ($\cap$)



Es n: [redacted] pag 825 Studiare la seguente funzione:

a:

$$y=\frac{(x+1)^3}{x^2}$$

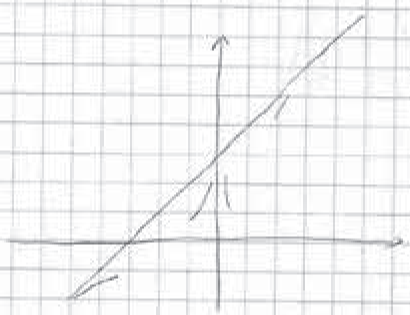
$D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+1)^3}{x^2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{(x+1)^3}{x^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(x+1)^3}{x^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^3}{x^2}=+\infty$$



La curva ha un asintoto obliquo:

$y=mx+n$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3}{x^3}=1$$

$m=1$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x+1)^3}{x^2}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3+3x^2+3x+1-x^3}{x^2}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3x^2+3x+1}{x^2}\right]=3$$

$n=3$

$y=x+3$ eq. dell'asintoto obliquo

Incontro con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases}y=\frac{(x+1)^3}{x^2}\\ y=0\end{cases}$$

$x_1=x_2=x_3=-1$

$A(-1,0)$ tangente

Studio del comportamento della funzione:

$$y'=\frac{3x^2(x+1)^2-2x(x+1)^3}{x^4}=\frac{3x^2(x^2+2x+1)-2x(x^3+3x^2+3x+1)}{x^4}=\frac{3x^4+\cancel{6x^3}+3x^2-2x^4-\cancel{6x^3}-6x^2-2x}{x^4}=\frac{x^4-3x^2-2x}{x^4}=$$

$$\frac{x(x^3-3x-2)}{x^4}=\frac{x(x+1)(x^2-x-2)}{x^4}=\frac{x(x+1)(x+1)(x-2)}{x^4}\geq0$$

$x\underbrace{(x+1)(x+1)}_{\text{non fa cambiare di segno}}(x-2)\geq0$

$x>0$

~~$x>$~~

$x\geq2$

per $x<-1$ la funzione è decrescente

per $-1<x<0$ la funzione è crescente

per $0<x<2$ la funzione è decrescente

per $x>2$ la funzione è crescente

Quindi:

per $x=-1$ la funzione ha un minimo relativo che vale:

$f(-1)=0$ (tangente)

per $x=2$ la funzione ha un minimo relativo che vale:

$f(2)=\frac{27}{4}$

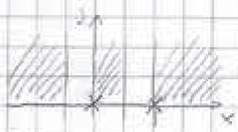
Es a pag 809 Studiare la seguente funzione

d: $$y=\sqrt{\frac{x(x-2)}{x^2-1}}$$

$$\frac{x(x-2)}{x^2-1}\geq 0$$

$x(x-2)\geq 0 \Rightarrow x\leq 0$ et $x\geq 2$

$x^2-1>0 \Rightarrow x<-1$ et $x>1$



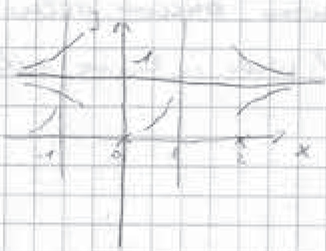
$D: (-\infty,-1)\cup[0,1)\cup[2,+\infty)$

Incontro con gli assi cartesiani:

$O(0,0)$; $A(0,2)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$$

$$\lim_{x\to-1} f(x)=+\infty$$



$$\lim_{x\to1} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

Studio dell'andamento della funzione:

$$y'=\frac{(2x-2)(x^2-1)+(2x-x^2)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{\cancel{2x^3}-2x-2x^2+2+4x^2-\cancel{2x^3}}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^2-2x+2}{(x^2-1)^2}>0\ \forall x\in D$$

La funzione cresce sempre.

$$y''=\frac{(4x-2)(x^2-1)^2+(-2x^2+2x-2)\cdot 4x\cdot(x^2-1)}{(x^2-1)^4}=\frac{(4x-2)(x^4-2x^2+1)+(4x^3-4x)(-2x^2+2x-2)}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{4x^5-8x^3+4x-2x^4+4x^2-2-8x^4+8x^3-8x^2+8x^3-8x^2+8x}{(x^2-1)^4}=\frac{4x^5-10x^4+8x^3-12x^2+12x-2}{(x^2-1)^4}=$$

$$\frac{(x-1)(4x^4-6x^3+2x^2-10x+2)}{(x^2-1)^4}\,.\quad y''=\frac{(x+1)(x-1)(-4x^3+6x^2-12x+2)}{(x^2-1)^4}$$

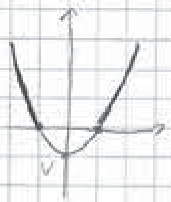
STOP

Esercizio: Studiare la seguente funzione modulare.

$y=|x^2-1|$

$$y=|x^2-1|$$

$$y=\begin{cases}x^2-1 & \text{se } x^2-1\geq 0 \text{ per } x\leq -1 \text{ et } x\geq 1\\ -x^2+1 & \text{se } x^2-1\leq 0 \text{ se } -1\leq x\leq 1\end{cases}$$



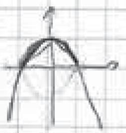
$y=x^2-1$

$x\leq -1$ et $x\geq 1$

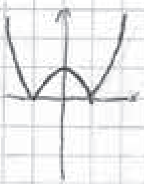
et = 1

$y=-x^2+1$

$-1\leq x\leq 1$



$y=|x^2-1|$



Metodo più semplice: si calcola la funzione modulare come se il modulo non ci fosse, fatto questo se la funzione assume valori negativi, questi si ribaltano e si rendono positivi, cioè il grafico che si trova nella parte delle y negative si ribalta rispetto all'asse x.

45 Es n = 252 pag 802

$y = \frac{x^3}{2x^2-1}$

$D = (-\infty, -\frac{1}{2}\sqrt{2}) \cup (-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}) \cup (\frac{1}{2}\sqrt{2}, +\infty)$

$\lim_{x\to\infty} y = \infty$

$\lim_{x\to -\frac{1}{2}\sqrt{2}^-} y = -\infty$

$\lim_{x\to -\frac{1}{2}\sqrt{2}^+} y = +\infty$

$\lim_{x\to \frac{1}{2}\sqrt{2}^-} y = -\infty$

$\lim_{x\to \frac{1}{2}\sqrt{2}^+} y = +\infty$

La curva ha un asintoto di eq. $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ e uno di eq. $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Inoltre ha un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^3-x} = \frac{1}{2}$

$m = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^3}{2x^2-1} - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{4x^2-2} = 0$

$q = 0$

$y = \frac{1}{2}x$ eq. dell'asintoto obliquo

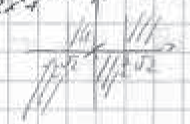
Segno della funzione:

$\frac{x^3}{2x^2-1} \geq 0$

$x^3 \geq 0$

$2x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ et $x > \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\frac{x^3}{2x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ~~dex~~



Studio dell'andamento della funzione:

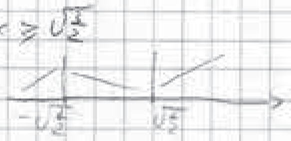
$y' = \frac{3x^2(2x^2-1) - 4x^4}{(2x^2-1)^2} = \frac{x^2(2x^2-3)}{(2x^2-1)^2}$

$\frac{x^2(2x^2-3)}{(2x^2-1)^2} \geq 0$

$x^2(2x^2-3) \geq 0$

$2x^2 - 3 \geq 0$

$x \leq -\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $x \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$



per $x < -\sqrt{\frac{3}{2}}$ la funzione cresce

per $-\sqrt{\frac{3}{2}} < x < \sqrt{\frac{3}{2}}$ la funzione decresce per $x > \sqrt{\frac{3}{2}}$ la funzione cresce

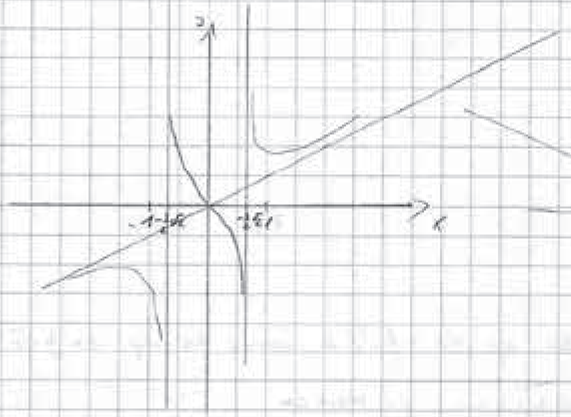
Quindi:

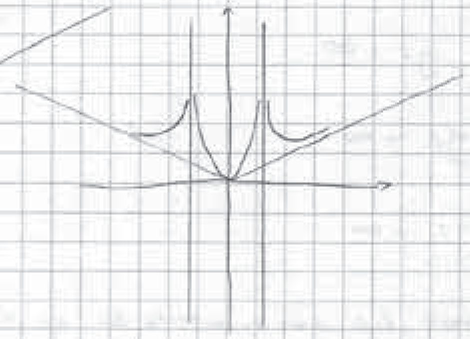
per $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f(-\sqrt{\frac{3}{2}}) = -\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$

per $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$f(\sqrt{\frac{3}{2}}) = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$





Es n: 214 pag 802

$y = \frac{x^3}{3-x^2}$

$D = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

$\lim_{x\to\infty} y = \infty$

$\lim_{x\to -\sqrt{3}^-} y = +\infty$

$\lim_{x\to -\sqrt{3}^+} y = -\infty$

$\lim_{x\to \sqrt{3}^-} y = +\infty$

$\lim_{x\to \sqrt{3}^+} y = -\infty$

La curva ha un asintoto di equazione $x = -\sqrt{3}$ e un altro di eq $x = \sqrt{3}$. Ha inoltre un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{-x^3+3x} = -1$

$m = -1$

$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2} + x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{3-x^2} = 0$

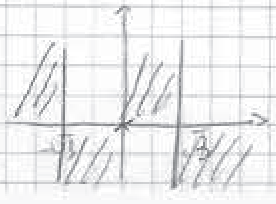
$y = -x$

Segno della funzione:

$\frac{x^3}{3-x^2} \geq 0$

$x^3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$3 - x^2 > 0 \Rightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$



O(0,0) Trivalente

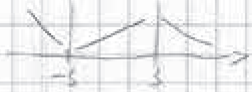
Studio dell'andamento della funzione:

$$y' = \frac{3x^2(3-x^2)+2x^4}{(3-x^2)^2} = \frac{-x^4+9x^2}{(3-x^2)^2} = \frac{-x^2(x^2-9)}{(3-x^2)^2}.$$

$$\frac{-x^2(x^2-9)}{(3-x^2)^2} \geq 0$$

$-x^2 < 0 \ \forall x \neq 0$

$x^2-9 \geq 0 \Rightarrow x<-3$ et $x>3$



per $x<-3$ la funzione decresce

per $-3<x<3$ la funzione cresce

per $x>3$ la funzione decresce

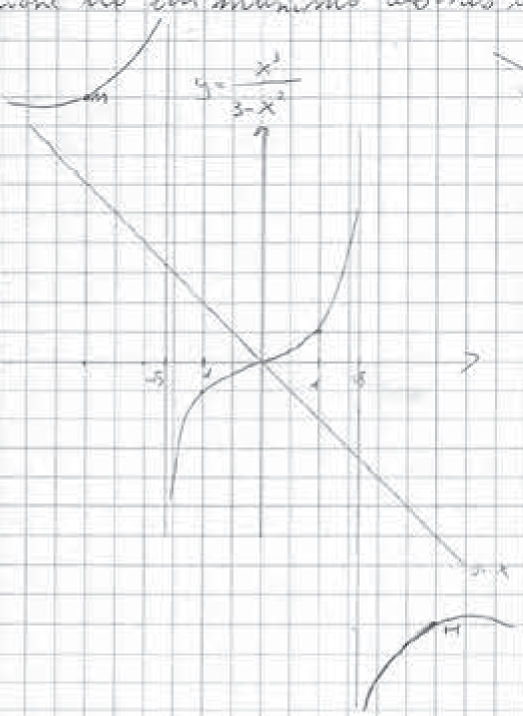
Quindi:

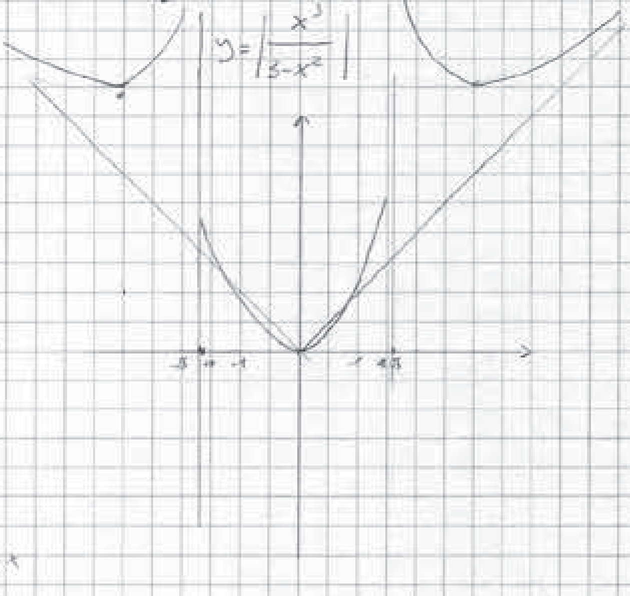
per $x=-3$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$f(-3) = \frac{9}{2}$

per $x=3$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f(3) = -\frac{9}{2}$





Es n: 237 pag 802

$$y = \frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$$

$D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$\lim_{x\to\infty} y = \infty$

$\lim_{x\to 0} y = -\infty$

La curva ha un asintoto di equazione $x=0$ e un asintoto obliquo di equazione $y=mx+n$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^3} = \frac{1}{2}$$

$m = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2} - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{2x^3}+4x^2+14x-6-\cancel{2x^3}}{4x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+14x-6}{4x^2} = \frac{4}{4} = 1$$

$y = \frac{1}{2}x + 1$ eq dell'asintoto obliquo

Segno della funzione

47 $y = x\sqrt{1-x^2}$

$D = [-1\ ;\ 1]$

$f(-1) = 0$

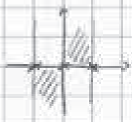
$f(1) = 0$

Segno della funzione

$x\sqrt{1-x^2} \geq 0$

$x\sqrt{1-x^2} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1$

$x\sqrt{1-x^2} \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 0$



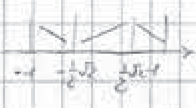
$y = \sqrt{x}$ $\quad y = \sqrt{f(x)}$

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad y' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$

$$y' = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{1}{\cancel{2}}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot -\cancel{2}x = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$y' \geq 0$ per $1-2x^2 \geq 0$

$-\frac{1}{2}\sqrt{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$



Per $-1 < x < -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ la funzione decresce

per $-\frac{1}{2}\sqrt{2} < x < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ la funzione cresce

per $\frac{1}{2}\sqrt{2} < x < 1$ la funzione decresce

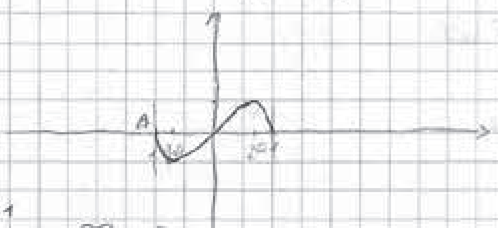
Quindi:

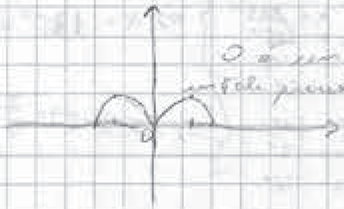
per $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ la funzione ha un minimo relativo, relativo ad un intorno di $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, il cui valore è:

$f(-\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}$ $\quad A(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2})$

per $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ la funzione ha un massimo relativo

$f(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{1}{2}$ $\quad B(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2})$





O è un punto cuspidale

$\lim_{x \to -1^+} \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

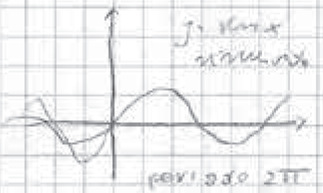
$\lim_{x \to 1^-} \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{0^+}$ simmetrie

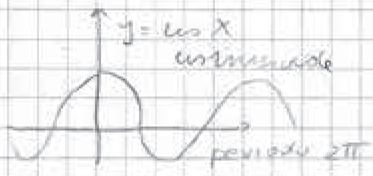
nei punti M e N la tangente alla curva si dispone parallela all'asse y

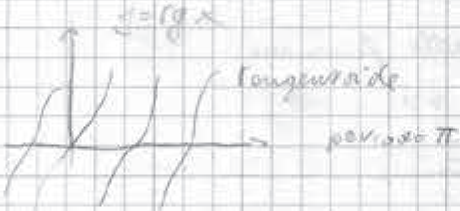
Quando in una funzione la x compare solo in modulo, la curva è simmetrica rispetto all'asse y

$y = \operatorname{sen} x$ funzione trascendente trigonometrica.

Tutte le funzioni trigonometriche si ripetono periodicamente in un certo periodo, ed un possono essere studiate solo in quel periodo.







$y =$ ~~[illegible]~~

$y = x + 3 \operatorname{sen} x$ funzione non periodica

Esercizio n: 354 pag 804

$y = \operatorname{sen} x + \cos x$ funzione trascendente trigonometrica con periodo 2π

La funzione può essere studiata nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

$f(0) = 1$

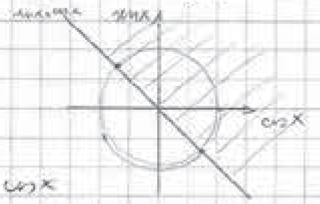
$f(2\pi) = 1$

Segno della funzione:

$\operatorname{sen} x + \cos x \geq 0$

$\operatorname{sen} x + \cos x = 0$ consideriamo tale equazione come quella di una retta in un sistema di assi cartesiani $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$

$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
0	0
1	-1



$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\cos x \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$2\cos^2 x = 1$

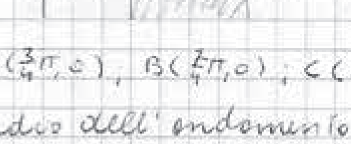
$\cos x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$\left.\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} < \begin{matrix} x = 135° \\ x = 225° \end{matrix} \\ \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}\sqrt{2} < \begin{matrix} x = 45° \\ x = 135° \end{matrix} \end{cases}\right\} \Rightarrow x = 135° = \frac{3}{4}\pi \text{ rad}$$

$$\left.\begin{matrix} \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2} < \begin{matrix} x = 45° \\ x = 315° \end{matrix} \\ \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} < \begin{matrix} x = 330° \\ x = -45° \end{matrix} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 315° = \frac{7}{4}\pi \text{ rad.}$$

$0 \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$ $\quad \frac{7}{4}\pi \leq x < 2\pi$

$0 \leq x \leq 135°$ $\quad 315° \leq x < 360°$



$A(\frac{3}{4}\pi, 0)$, $B(\frac{7}{4}\pi, 0)$; $C(0, 1)$

Studio dell'andamento della funzione:

$y' = -\operatorname{sen} x + \cos x$

$-\operatorname{sen} x + \cos x \geq 0$

$-\sin x + \cos x = 0$

$\sin x$	$\cos x$
0	0
1	1

$$\begin{cases} -\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \cos x \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$2\cos^2 x = 1$

$\cos x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$\left.\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \; < \begin{matrix} x = 225° = \frac{5}{4}\pi \text{ rad} \\ x = 135° \end{matrix} \\ \sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \; < \begin{matrix} x = 315° \\ x = 225° \end{matrix} \end{cases}\right\} \Rightarrow x = 225° = \frac{5}{4}\pi \text{ rad}$$

$$\left.\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2} \; < \begin{matrix} x = 45° \\ x = 315° \end{matrix} \\ \sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2} \; < \begin{matrix} x = 45° \\ x = 135° \end{matrix} \end{cases}\right\} \Rightarrow x = 45° = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$0 < x \leq \frac{\pi}{4}$ et $\frac{5}{4}\pi \leq x < 2\pi$

per $0 < x < \frac{\pi}{4}$ la funzione cresce

per $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5}{4}\pi$ la funzione decresce

per $\frac{5}{4}\pi < x < 2\pi$ la funzione cresce

Quindi:

per $x = \frac{\pi}{4}$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

per $x = \frac{5}{4}\pi$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$f(\frac{5}{4}\pi) = -\sqrt{2}$

$y'' = -\cos x - \sin x$

$-\cos x - \sin x \geq 0 \Rightarrow \sin x + \cos x \leq 0$

$\frac{3}{4}\pi \leq x \leq \frac{7}{4}\pi$

$135° \leq x \leq 315°$

per $0 < x < \frac{3}{4}\pi$ la funzione ha una concavità ~~positiva~~ negativa ($\cap$)

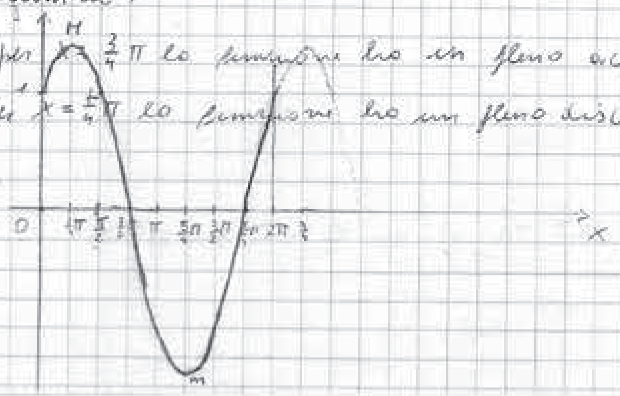
per $\frac{3}{4}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$ la funzione ha una concavità positiva ($\cup$)

per $\frac{7}{4}\pi < x < 2\pi$ la funzione ha una concavità negativa ($\cap$)

Quindi:

per $x = \frac{3}{4}\pi$ la funzione ha un flesso ascendente

per $x = \frac{7}{4}\pi$ la funzione ha un flesso discendente



Es n: 355 pag 804

$y = \operatorname{sen} x - \cos x$ funzione trascendentale trigonometrica con periodo 2π

La funzione può essere studiata nell'intervallo $[0, 2\pi]$

$f(0) = -1$

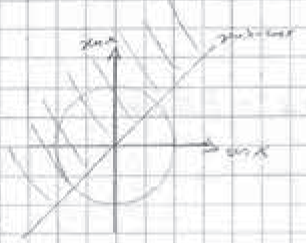
$f(2\pi) = -1$

Segno della funzione:

$\operatorname{sen} x - \cos x \geq 0$

$\operatorname{sen} x - \cos x = 0$

sen x	cos x
0	0
1	1



$$\begin{cases} \operatorname{sen} x - \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \cos x \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$2\cos^2 x = 1$

$\cos x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$\left.\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} < {x = \frac{5}{4}\pi \atop x = \frac{3}{4}\pi} \\ \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} < {x = \frac{7}{4}\pi \atop x = \frac{5}{4}\pi} \end{cases}\right\} \Rightarrow x = \frac{5}{4}\pi$$

$$\left.\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2} < {x = \frac{\pi}{4} \atop x = \frac{7}{4}\pi} \\ \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}\sqrt{2} < {x = \frac{\pi}{4} \atop x = \frac{3}{4}\pi} \end{cases}\right\} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$

$A(\frac{\pi}{4}, 0)$; $B(\frac{5}{4}\pi, 0)$; $C(0, -1)$

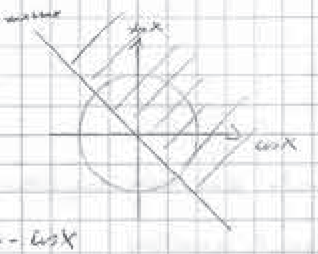
Studio dell'andamento della funzione:

$y' = \operatorname{sen} x + \cos x$

$\operatorname{sen} x + \cos x \geq 0$

$\operatorname{sen} x + \cos x = 0$

sen x	cos x
0	0
1	−1



$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\cos x \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$2\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$\left.\begin{matrix} \cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} < {x = \frac{3}{4}\pi \atop x = \frac{5}{4}\pi} \\ \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}\sqrt{2} < {x = \frac{\pi}{4} \atop x = \frac{3}{4}\pi} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \frac{3}{4}\pi$$

$$\left.\begin{matrix} \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2} < {x = \frac{\pi}{4} \atop x = \frac{7}{4}\pi} \\ \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}\sqrt{2} < {x = \frac{5}{4}\pi \atop x = -\frac{3}{4}\pi} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \frac{7}{4}\pi$$

$0 < x \leq \frac{3}{4}\pi$ $\frac{7}{4}\pi \leq x < 2\pi$

per $0<x<\frac{3}{4}\pi$ la funzione cresce

per $\frac{3}{4}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$ la funzione decresce

per $\frac{7}{4}\pi<x<2\pi$ la funzione cresce

Quindi:

per $x=\frac{3}{4}\pi$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f(\frac{3}{4}\pi)=\sqrt{2}$

per $x=\frac{7}{4}\pi$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$f(\frac{7}{4}\pi)=-\sqrt{2}$

$y''=-\operatorname{sen}x+\cos x$

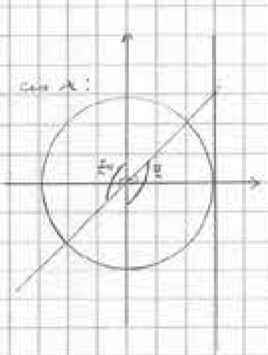
$-\operatorname{sen}x+\cos x\geq 0$

posso dividere ambo i membri per $\cos x$:

$-\operatorname{tg}x+1\geq 0$

$\operatorname{tg}x\leq 1$

$\frac{5}{4}\pi\leq x<2\pi \wedge 0<x\leq\frac{\pi}{4}$



per $0<x<\frac{\pi}{4}$ la funzione ha una concavità positiva (∪)

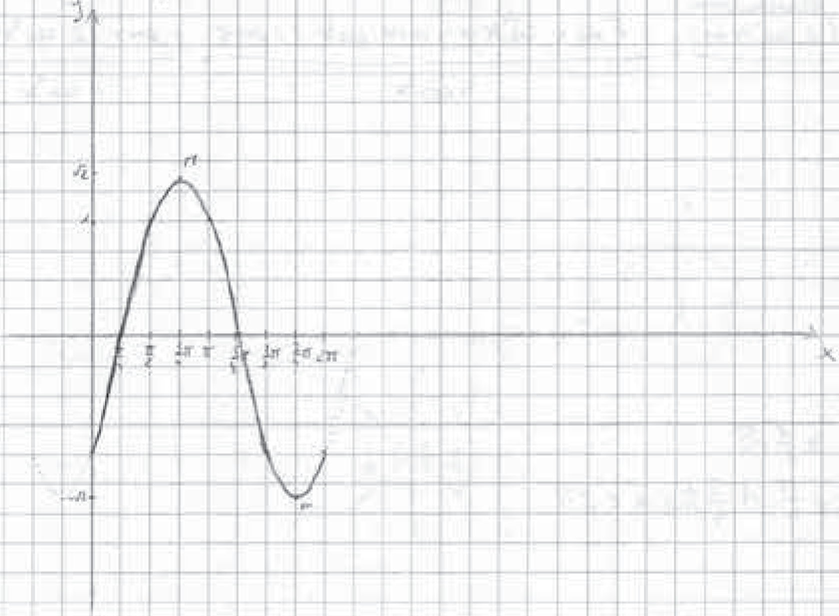
per $\frac{\pi}{4}<x<\frac{5}{4}\pi$ la funzione ha una concavità negativa (∩)

per $\frac{5}{4}\pi<x<2\pi$ la funzione ha una concavità positiva (∪)

Quindi:

per $x=\frac{\pi}{4}$ la funzione ha un flesso discendente

per $x=\frac{5}{4}\pi$ la funzione ha un flesso ascendente



Es n° 330 pag 804

$$y = \frac{2\cos^2 x + 1}{2\cos x}$$

periodo

funzione trascendentale goniometrica con periodo 2π

$0 < x < 2\pi$

$D = \{ x \neq 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ con $k \in N$, calcolato così $\cos x \neq 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \wedge \frac{3}{2}\pi$ quindi il dominio è: $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$

Dato che è definita in un intervallo lungo 2π, periodo 2π

(La funzione può essere studiata nell'intervallo $[0, 2\pi]$)

poniamo (?) le due rette $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3}{2}\pi$ asintoti verticali

$f(0) = \frac{3}{2}$ $A(0, \frac{3}{2})$ = punto di intersezione con asse y -

$f(2\pi) = \frac{3}{2}$ $B(2\pi, \frac{3}{2})$ ~~asintoto~~

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{2\cos^2 x + 1}{2\cos x} = +\infty$$ (N tende a numero positivo, il D tende a zero positivamente perché nel I quadrante)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{2\cos^2 x + 1}{2\cos x} = -\infty$$ (N tende a numero positivo (+1) e D tende a zero negativamente nel II)

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}\pi^-} \frac{2\cos^2 x + 1}{2\cos x} = -\infty$$

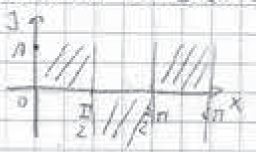
$$\lim_{x \to \frac{3}{2}\pi^+} \frac{2\cos^2 x + 1}{2\cos x} = +\infty$$

Segno della funzione

$$\frac{2\cos^2 x + 1}{2\cos x} \geq 0$$

$2\cos^2 x + 1 > 0 \ \forall x \in D$

$2\cos x > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2} \wedge \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$



$A(0, \frac{3}{2})$

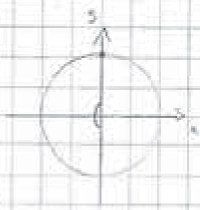
Studio dell'andamento della funzione:

$$y' = \frac{2\cdot 2\cos x \cdot (-\operatorname{sen} x)\cdot 2\cos x + 2\operatorname{sen} x(2\cos^2 x + 1)}{4\cos^2 x} = \frac{-8\operatorname{sen} x\cos^2 x + 4\operatorname{sen} x\cos^2 x + 2\operatorname{sen} x}{4\cos^2 x} = \frac{-\operatorname{sen} x(2\cos^2 x - 1)}{2\cos^2 x}$$

$$\frac{-\operatorname{sen} x(2\cos^2 x - 1)}{2\cos^2 x} \geq 0$$

$-\operatorname{sen} x \geq 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x \leq 0$

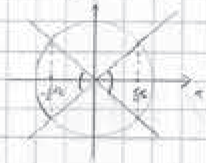
$\pi \leq x \leq 2\pi$



$2\cos^2 x - 1 \geq 0$

$\cos x \leq -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\wedge$ $\cos x \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\frac{3}{4}\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$ $\quad 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \wedge \frac{7}{4}\pi \leq x < 2\pi$



Per $0<x<\frac{\pi}{4}$ la funzione decresce

per $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$ la funzione cresce

per $\frac{3}{4}\pi<x<\pi$ la funzione decresce

per $\pi<x<\frac{5}{4}\pi$ la funzione cresce

per $\frac{5}{4}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$ la funzione decresce

per $\frac{7}{4}\pi<x<2\pi$ la funzione cresce

Quindi:

per $x=\frac{\pi}{4}$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

per $x=\frac{3}{4}\pi$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f(\frac{3}{4}\pi) = -\sqrt{2}$

per $x=\pi$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$f(\pi) = -\frac{3}{2}$

per $x=\frac{5}{4}\pi$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

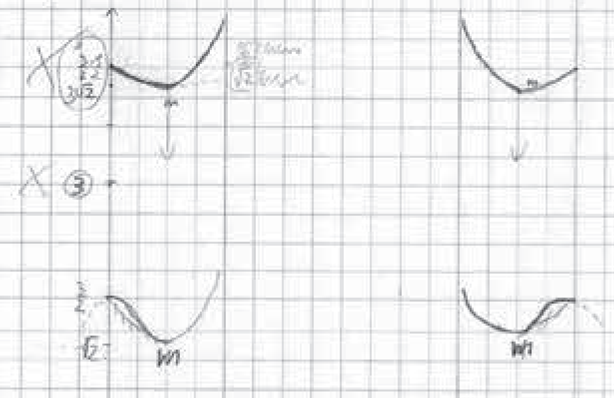
$f(\frac{5}{4}\pi) = -\sqrt{2}$

per $x=\frac{7}{4}\pi$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$f(\frac{7}{4}\pi) = \sqrt{2}$

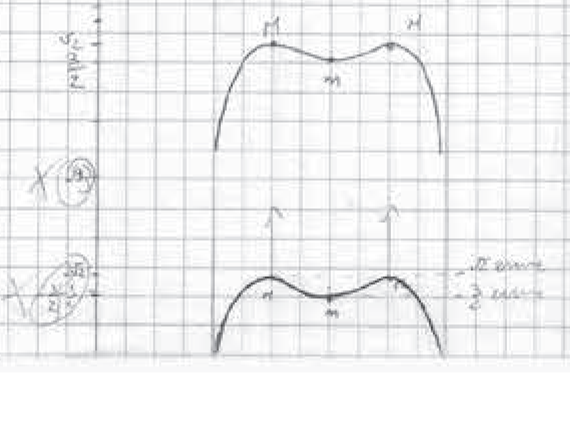
per $x=2\pi$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f(2\pi) = \frac{3}{2}$



$\pi \simeq 3$

4 flessi



Es n: 345 pag 803

$y = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$

$D = (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$

$\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} = -1$

$\lim_{x\to-1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} = -\infty$

$\lim_{x\to1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$

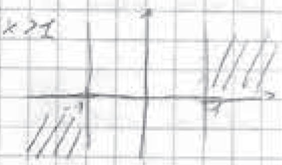
$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} = 1$

Segno della funzione:

$\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} > 0$

$x-1>0 \Rightarrow x>1$

$\sqrt{x^2-1} > 0 \Rightarrow x<-1 \text{ et } x>1$

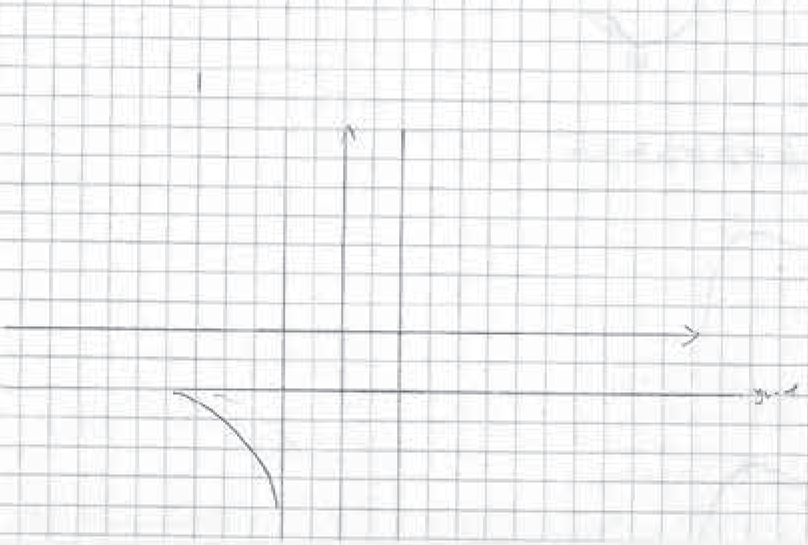


Studio dell'andamento della funzione:

$y' = \dfrac{\sqrt{x^2-1} - (x-1)\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \dfrac{\dfrac{x^2-1-x^2+x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$

per $x<-1$ la funzione decresce

per $x>1$ la funzione cresce



51 Es n = 371 pag 804

$y = \dfrac{3\sin x - 1}{2\sin^2 x}$ funzione periodica periodica di periodo 2π.

Può essere studiata in un intervallo lungo 2π, come ad es. $(0, 2\pi)$

La funzione ha asintoti di equazioni: $x = 0 \wedge x = \pi \wedge x = 2\pi$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3\sin x - 1}{2\sin^2 x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{3\sin x - 1}{2\sin^2 x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \pi^+} \frac{3\sin x - 1}{2\sin^2 x} = -\infty$$

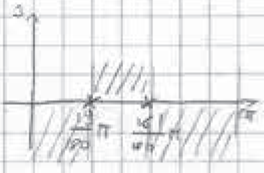
$$\lim_{x \to 2\pi} \frac{3\sin x - 1}{2\sin^2 x} = -\infty$$

Segno della funzione

$$\frac{3\sin x - 1}{2\sin^2 x} \geq 0 \Rightarrow 3\sin x - 1 \geq 0$$

$\sin x \geq \frac{1}{3}$

$\frac{19}{180}\pi \leq x \leq \frac{161}{180}\pi$



$A(\frac{19}{180}\pi, 0)$; $B(\frac{161}{180}\pi, 0)$

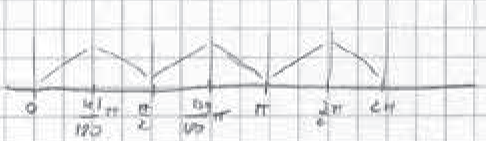
Studio dell'andamento della funzione

$$y' = \frac{3\cos x \cdot 2\sin^2 x - 4\sin x \cos x (3\sin x - 1)}{4\sin^4 x} = \frac{-\sin x \cos x (3\sin x - 2)}{2\sin^4 x} \geq 0$$

$-\sin x \geq 0 \Rightarrow \pi < x < 2\pi$

$\cos x \geq 0 \Rightarrow 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \wedge \frac{3}{2}\pi \leq x < 2\pi$

$3\sin x - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{41}{180}\pi \leq x \leq \frac{139}{180}\pi$



per $0 < x < \frac{41}{180}\pi$ la funzione cresce

per $\frac{41}{180} < x < \frac{\pi}{2}$ la funzione decresce

per $\frac{\pi}{2} < x < \frac{139}{180}\pi$ la funzione cresce

per $\frac{139}{180}\pi < x < \pi$ la funzione decresce

per $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ la funzione cresce

per $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$ la funzione decresce

Quindi:

per $x = \frac{41}{180}\pi$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f(\frac{41}{180}\pi) = \frac{9}{8}$

per $x = \frac{\pi}{2}$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

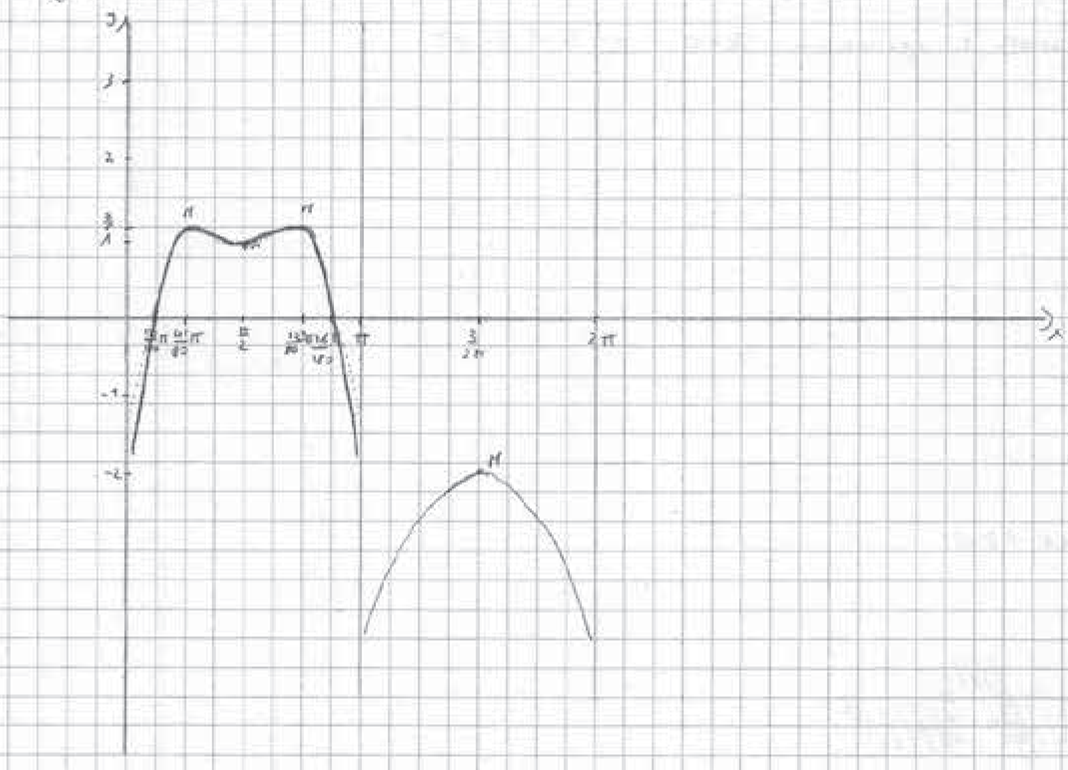
$f(\frac{\pi}{2}) = 1$

per $x = \frac{139}{180}\pi$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f\left(\frac{139}{180}\pi\right) = \frac{9}{8}$

per $x = \frac{3}{2}\pi$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -2$



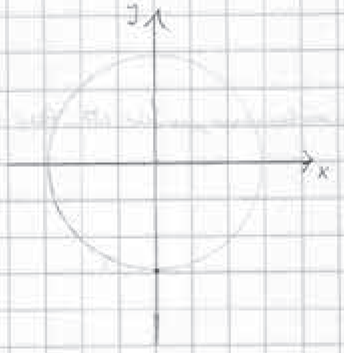
52 Es n = 330 pag 805

$y=\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ funzione periodica di periodo 2π.

La funzione può essere studiata nell'intervallo lungo 2π, quale $[0, 2\pi]$

$f(0)=1$

$f(2\pi)=1$



$\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\geq 0$

$1+\sin x\geq 0$

$1+\sin x>0\ \forall x$

$1+\sin x=0 \Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}$

$1-\sin x\geq 0$

$1-\sin x>0\ \forall x$

$1-\sin x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$

$D = [0, \frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2}; 2\pi]$

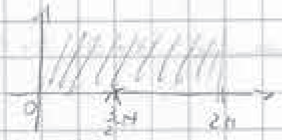
$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}=+\infty$

Segno della funzione

$\sqrt{\frac{\sin x+1}{1-\sin x}}\geq 0$

$\sqrt{\frac{\sin x+1}{1-\sin x}}>0\ \forall x\in D$

$\sqrt{\frac{\sin x+1}{1-\sin x}}=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}\pi$



Studio dell'andamento della funzione: (ovviamente l'andamento della funzione sarà quello della funzione $z=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$

$$z'(x)=\frac{\cos x(1-\sin x)-(1+\sin x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2};\ \geq 0$$

$z'\geq 0$ per $\cos x\geq 0$

$\frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}\geq 0 \rightarrow 2\cos x\geq 0$

$\frac{3\pi}{2}<x\leq 2\pi \wedge 0\leq x<\frac{\pi}{2}$

Quindi la funzione f ha lo stesso andamento della funzione z.

per $0<x<\frac{\pi}{2}$ la funzione cresce

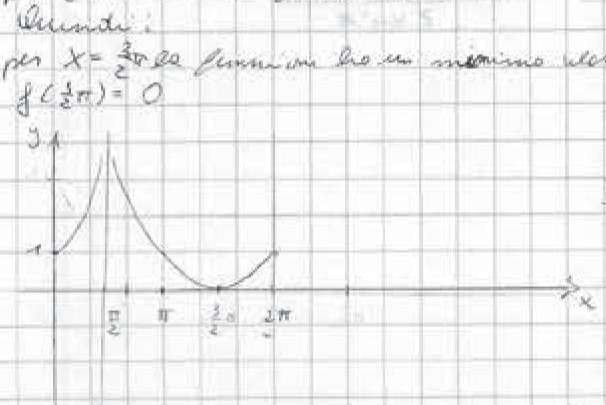
per $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$ la funzione decresce

per $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$ la funzione cresce

Quindi:

per $x=\frac{3}{2}\pi$ la funzione ha un minimo il cui valore è:

$f(\frac{3}{2}\pi)=0$



$I\ [0, +\infty)$

l'immagine che cercavamo

Teorema di Rolle:

Es n° 382 pag 805

$$y = \frac{2\sin^2 x + 1}{2\sin x}$$ funzione trascendente periodica con periodo 2π. Per cui la studio in un intervallo lungo 2π, quindi $(0, 2\pi)$

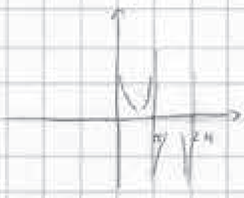
$2\sin x \neq 0$

$x \neq 0 \wedge x \neq \pi \wedge x \neq 2\pi$

$D = (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 x + 1}{2\sin x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{2\sin^2 x + 1}{2\sin x} = +\infty$$



$$\lim_{x \to \pi^+} \frac{2\sin^2 x + 1}{2\sin x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2\pi} \frac{2\sin^2 x + 1}{2\sin x} = -\infty$$

La funzione ha 3 asintoti paralleli all'asse y di equazione: $x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$.

Segno della funzione:

$$\frac{2\sin^2 x + 1}{2\sin x} \geq 0$$

$2\sin^2 x + 1 > 0 \quad \forall x \in D$

$2\sin x > 0$

$0 < x < \pi$

Studio dell'andamento della funzione:

$$y' = \frac{8\sin^2 x\cos x - 2\cos x(2\sin^2 x + 1)}{4\sin^2 x} = \frac{4\sin^2 x\cos x - 2\cos x}{4\sin^2 x} = \frac{\cos x(2\sin^2 x - 1)}{2\sin^2 x}.$$

$$\frac{\cos x(2\sin^2 x - 1)}{2\sin^2 x} \geq 0$$

$\cos x(2\sin^2 x - 1) \geq 0$

$\cos x \geq 0$

$0 < x \leq \frac{\pi}{2}\pi \wedge \frac{3}{2}\pi \leq x < 2\pi$

$2\sin^2 x - 1 \geq 0$

$\sin x \leq -\frac{1}{2}\sqrt{2} \wedge \sin x \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\frac{5}{4}\pi \leq x \leq \frac{7}{4}\pi \wedge \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$

per $0<x<\frac{\pi}{4}$ la funzione decresce

per $\frac{\pi}{4}<x<\frac{1}{2}\pi$ la funzione cresce

per $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{4}\pi$ la funzione decresce

per $\frac{3}{4}\pi<x<\frac{5}{4}\pi$ la funzione cresce

per $\frac{5}{4}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$ la funzione decresce

per $\frac{3}{2}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$ la funzione cresce

per $\frac{7}{4}\pi<x<2\pi$ la funzione decresce

Quindi:

per $x=\frac{\pi}{4}$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$

per $x=\frac{\pi}{2}$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f(\frac{\pi}{2})=\frac{3}{2}$

per $x=\frac{3}{4}\pi$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$f(\frac{3}{4}\pi)=\sqrt{2}$

per $x=\frac{5}{4}\pi$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

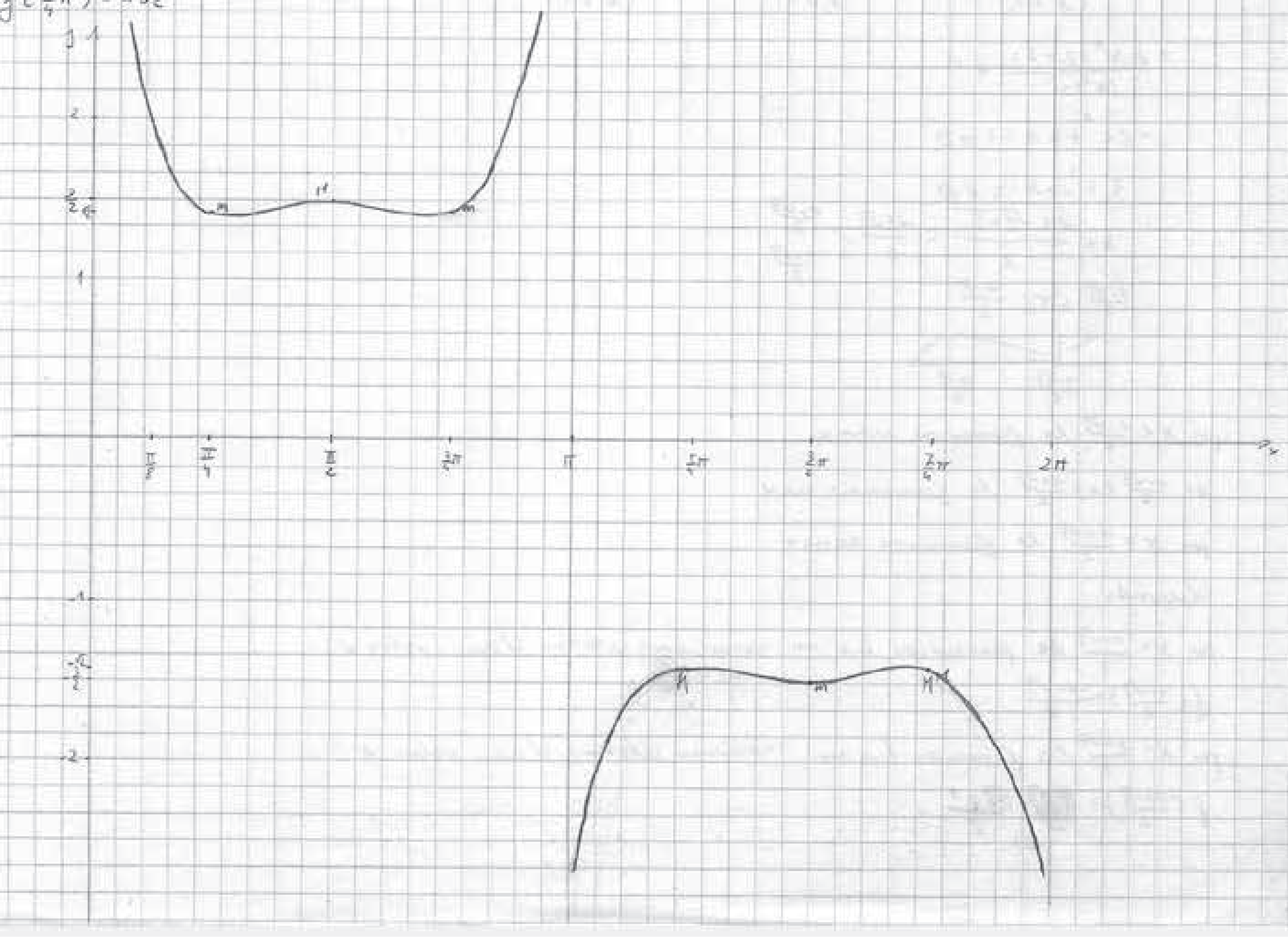
$f(\frac{5}{4}\pi)=-\sqrt{2}$

per $x=\frac{3}{2}\pi$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$f(\frac{3}{2}\pi)=-\frac{3}{2}$

per $x=\frac{7}{4}\pi$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f(\frac{7}{4}\pi)=-\sqrt{2}$



Studiare le seguenti funzioni:

$y = \frac{2x-1}{x^2+1}$

$y = \left|\frac{2x-1}{x^2+1}\right|$

$y = \cos x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$

$y = \frac{2x-1}{x^2+1}$ funzione razionale fratta di terzo grado; il grafico sarà una curva di terzo ordine

$D = (-\infty; +\infty)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x-1}{x^2+1} = 0$

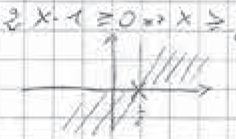
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{x^2+1} = 0$

La funzione ha un asintoto ~~parallelo~~ che è all'asse x (di equazione: $y = 0$)

Signo della funzione

$\frac{2x-1}{x^2+1} \geq 0$

$2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$



$A(\frac{1}{2}; 0)$; $B(0; -1)$

Studio dell'andamento della funzione

$y' = \frac{2(x^2+1)+(1-2x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2+2x-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}$

$\frac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2} \geq 0$

$-2x^2+2x+2 \geq 0$

$2x^2-2x-2 \leq 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

per $x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ la funzione decresce

per $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ la funzione cresce

per $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ la funzione decresce

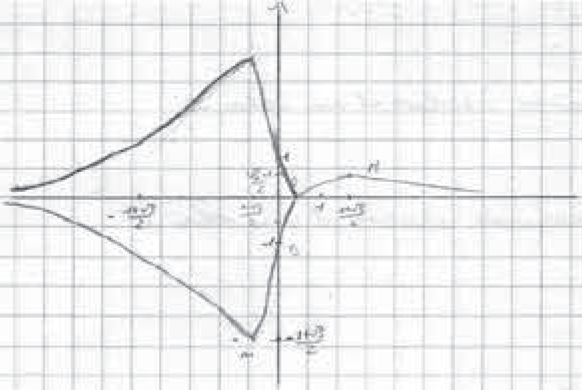
Quindi:

per $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$f(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

per $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$



$y = \cos x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$ funzione periodica goniometrica con periodo 2π.

La funzione può essere studiata in un intervallo lungo 2π, come $[0, 2\pi]$

$D = [0, 2\pi]$

$f(0) = 1$

$f(2\pi) = 1$

Segno della funzione

$\cos x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x \geq 0$

$\cos x - \operatorname{sen} x \cos x \geq 0$

$\cos x\,(1 - \operatorname{sen} x) \geq 0$

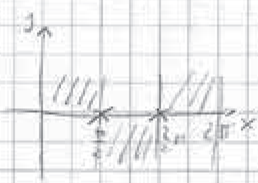
$\cos x \geq 0$

$\frac{3}{2}\pi \leq x < 2\pi \wedge 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$1 - \operatorname{sen} x \geq 0$

$1 - \operatorname{sen} x \geq 0 \ \forall x \in D$

$1 - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$



Studio dell'andamento della funzione:

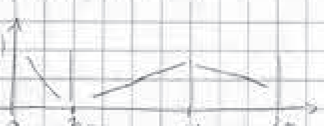
$y' = 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1$

$\operatorname{sen} x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$

$y' \geq 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x \leq -\frac{1}{2} \vee \operatorname{sen} x \geq 1$

$\operatorname{sen} x \leq -\frac{1}{2}$

$\frac{7}{6}\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi$



$\operatorname{sen} x > 1$ impossibile

$\operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

per $0 < x < \frac{7}{6}\pi$ la funzione decresce

per $\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$ la funzione cresce

per $\frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$ la funzione decresce

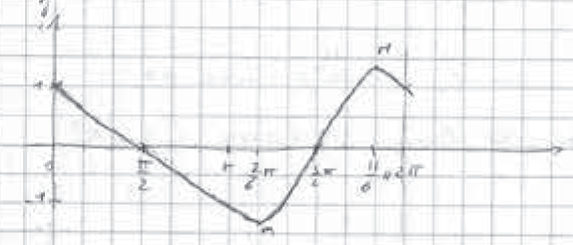
Quindi:

per $x=\frac{7}{6}\pi$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$f(\frac{7}{6}\pi) = -\frac{3}{4}\sqrt{3}$

per $x=\frac{11}{6}\pi$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

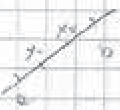
$f(\frac{11}{6}\pi) = \frac{3}{4}\sqrt{3}$



Teorema

Se una funzione $f(x)$ ha la derivata nulla in tutti i punti di un intervallo $[a,b]$, allora la funzione è uguale a una costante per ogni x dell'intervallo

$$Ip: \exists f(x) : f'(x)=0 \ \forall x \in [a,b] \qquad Ts: f(x)=K$$



$x_1 \neq x_2$ sono 2 punti QUALUNQUE dell'intervallo e per il teorema di Lagrange si ha:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$$

la f(x) soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange perché è continua ed è derivabile in tutti i punti dell'intervallo

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 0$$

$$f(x_2)-f(x_1)=0$$

$$f(x_2)=f(x_1)$$

Teorema:

Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ hanno la stessa derivata in tutti i punti dell'intervallo (a,b), allora la loro differenza è costante:

Ip $\exists f(x), g(x): \forall x \in D = D_1 \cap D_2$:

$f'(x) = g'(x)$

Ts: $\forall x \in D$:

$f(x)-g(x)=K$

$F(x) = f(x)-g(x)$ consideriamo la $F(x)$

$F'(x) = f'(x)-g'(x)$ poiché $f'(x)=g'(x)$, la loro differenza è uguale a zero per tutti gli x del...

$F'(x)=0 \ \forall x \in D$

$F(x)=K$

$f(x)-g(x)=K$

55

$2\,\text{sen}\,x - 2\sqrt{3}\cos x + 1 > 0$ disequazione lineare in seno e coseno

pongo $\text{tg}\frac{x}{2} = t$

$$\frac{2t}{1+t^2} - \frac{2\sqrt{3}(1-t^2)}{1+t^2} + 1 > 0$$

$$2t - 2\sqrt{3}(1-t^2) + 1 > 0$$

$$2t - 2\sqrt{3} + 2t^2\sqrt{3} + 1 > 0$$

$$2t^2\sqrt{3} + 2t - 2\sqrt{3} + 1 > 0$$

$$2t^2\sqrt{3} + 2t - 2\sqrt{3} + 1 = 0$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} \quad (1) \text{ eccetera}$$

Supponiamo che la (1) sia fatta così:

$$3t^2 - (3+\sqrt{3})t + \sqrt{3} \geq 0$$

$$3t^2 - (3+\sqrt{3})t + \sqrt{3} = 0$$

$$t = \frac{3+\sqrt{3} \pm \sqrt{12+6\sqrt{3}-12\sqrt{3}}}{6} = \frac{3+\sqrt{3} \pm \sqrt{12-6\sqrt{3}}}{6}$$

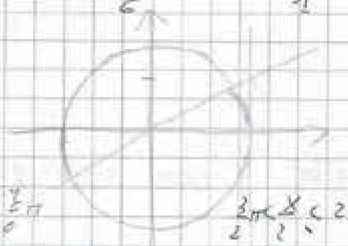
$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

$$\sqrt{12+6\sqrt{3}} = \sqrt{12-\sqrt{108}}$$

$$t = \frac{3+\sqrt{3} \pm \sqrt{9} - \sqrt{3}}{6} = \frac{3+\sqrt{3} \pm (3-\sqrt{3})}{6} < \begin{matrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 1 \end{matrix}$$

$$3t^2 - (3+\sqrt{3})t + \sqrt{3} \geq 0$$

$$t \leq \frac{1}{3}\sqrt{3} \quad \vee \quad t \geq 1$$



$\text{tg}\frac{x}{2} \leq \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$0 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{6}$ $\qquad \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{7}{6}\pi$ $\qquad \frac{3}{2}\pi < \frac{x}{2} \leq 2\pi$

$0 < x < \frac{\pi}{3}$ $\qquad \pi < x < \frac{7}{3}\pi$ $\qquad 3\pi < x \leq 4\pi$

$\text{tg}\frac{x}{2} \geq 1$

$\frac{\pi}{4} \leq \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ $\qquad \frac{5}{4}\pi < \frac{x}{2} < \frac{3}{2}\pi$

$\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$ $\qquad \frac{5}{2}\pi < x < 3\pi$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$

$D\, x^3 \longrightarrow 3x^2$

$D\, x^3 + 4 \longrightarrow 3x^2$

$D\, x^3 - \frac{1}{2} \longrightarrow 3x^2$

$x^3 + K$ primitiva generica di $3x^2$

La primitiva generale di una funzione è l'integrale indefinito.

L'integrale indefinito di una f. $f(x)$ è la primitiva generale scritta [illegible]

$$\int f(x) \cdot dx$$

$$\int 3x^2\, dx = x^3 + K$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + K$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \lg_e |x| + K$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + K$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{x} + K$$

$$\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + K \quad \text{con } n \neq -1$$

Infatti:

$$D\, \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + K = x^n$$

Se $n = -1$

$$\int x^{-1}\, dx = \lg |x| + K$$

$$\int \sqrt{x} = \int x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot x^{\frac{1}{2}+1} + K = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + K = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + K$$

$$\int n f(x)\, dx = n \int f(x)\, dx$$

infatti

$$D \int n f(x)\, dx = n\, D \int f(x)\, dx = n\, f(x)$$

Es n: 36 pag 330 (trigonometria)

$4\cos^2 x - 1 > 0$

$\cos^2 x > \frac{1}{4}$

$\cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{2}$

$\cos^2 x > \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x < -\frac{1}{2}$ et $\cos x > \frac{1}{2}$

$\cos x < -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos x > \frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}\pi < x < \frac{4}{3}\pi$ $\qquad$ $0 < x < \frac{\pi}{3}$ et $\frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$

Es n: 37 pag 330

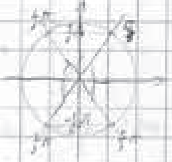
$4\sin^2 x - 3 \leq 0$

$\sin^2 x \leq \frac{3}{4}$

$\sin^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\sin^2 x \leq \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2}\sqrt{3} \leq \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\sin x \geq -\frac{1}{2}\sqrt{3}$



$0 \leq x \leq \frac{4}{3}\pi$ et $\frac{5}{3}\pi \leq x \leq 2\pi$ ~~[illegible]~~

$\sin x \leq \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\frac{2}{3}\pi \leq x \leq 2\pi$ et ~~[illegible]~~ et $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ et $\frac{2}{3}\pi < x < \frac{4}{3}\pi$ et $\frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$

Es n: 33 pag 330

$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 > 0$

$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

$\cos x = \frac{3 \pm 1}{4} \begin{cases} \frac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$

$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 > 0$ per $\cos x < \frac{1}{2}$

$\frac{5}{3}\pi < x < \frac{\pi}{3}$

Es n: 40 pag 331

$\sin^2 x - 3\sin x - 4 < 0$

$\sin^2 x - 3\sin x - 4 = 0$

$\sin x = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{cases} -1 \\ 4 \end{cases}$

$\sin^2 x - 3\sin x - 4 < 0 \Rightarrow -1 < \sin x < 4$

$\sin x > -1 \ \forall x \neq \frac{3}{2}\pi$

$\sin x < 4 \ \forall x$

Es n: 41 pag 391

$\operatorname{sen}^2 x - 4 \operatorname{sen} x + 3 < 0$

$\operatorname{sen}^2 x - 4 \operatorname{sen} x + 3 = 0$

$\operatorname{sen} x = 2 \pm 1 \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$

$\operatorname{sen}^2 x - 4 \operatorname{sen} x + 3 < 0 \Rightarrow 1 < \operatorname{sen} x < 3$

la disequazione è impossibile.

Es n: 47 pag 391

$3 \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3} > 0$ (1)

pongo $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ e applico le formule parametriche:

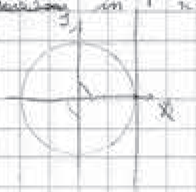
$$\frac{6t}{1+t^2} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot t^2}{1+t^2} + \sqrt{3} > 0$$

$$6t - \cancel{\sqrt{3}} - \cancel{t^2\sqrt{3}} + \cancel{\sqrt{3}} + \cancel{\sqrt{3}\, t^2} > 0$$

$6t > 0 \Rightarrow t > 0$

Poichè la ~~equazione~~ disequazione in t si è abbassata di grado, una delle soluzioni della (1) è π.

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} > 0$



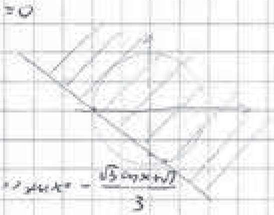
$0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ et $\pi < \frac{x}{2} < \frac{3}{2}\pi$

$0 < x < \pi$ et $2\pi < x < 3\pi$

$3 \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3} > 0$

$3 \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3} = 0$

sen x	cos x
0	-1
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



$$\begin{cases} 3 \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}}{3} \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$$\cos^2 x + \frac{3\cos^2 x + 6 \cos x + 3}{9} = 1$$

$3 \cos^2 x + \cos^2 x + 2 \cos x + \cancel{1} = \cancel{3}$

$4 \cos^2 x + 2 \cos x - 2 = 0$

$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$$\cos x = \frac{-1 \pm 3}{4} \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos x = -1 \begin{cases} x = \pi \\ x = \pi \end{cases} \\ \operatorname{sen} x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow x = \pi$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{5}{3}\pi \end{cases} \\ \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \begin{cases} \frac{5}{3}\pi \\ -\frac{\pi}{3} \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{5}{3}\pi$$

$3 \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3} > 0$

$0 < x < \pi$ et $\frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$

57

Es n: 48 pag 331

$\sin x + \cos x < -1$ (1)

$\sin x + \cos x + 1 < 0$

pongo $tg\frac{x}{2} = t$ e applico le formule parametriche:

$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1 < 0$

$2t + 1 - t^2 + 1 + t^2 < 0$

$2t + 2 < 0 \Rightarrow t < -1$

Poiché ~~l'equazione~~ disequazione in t è [illegible] di [illegible] una delle [illegible] della 91 e π

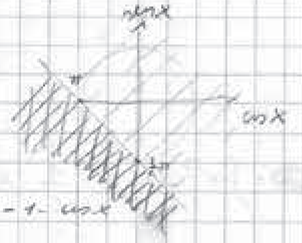
$tg\frac{x}{2} < -1$

$\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3}{4}\pi$ et $\frac{3}{2}\pi < \frac{x}{2} < \frac{7}{4}\pi$

$\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ et $3\pi < x < \frac{7}{2}\pi$

$\sin x + \cos x + 1 = 0$

$\sin x$	$\cos$
0	-1
-1	0



$\begin{cases} \sin x + \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1 - \cos x \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$

$1 + 2\cos x + \cos^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x + \cos x = 0$

$\cos x = 0$ et $\cos x = -1$

$\left.\begin{cases} \cos x = 0 \; \begin{matrix} \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} \end{matrix} \\ \sin x = -1 \; \begin{matrix} \frac{3}{2}\pi \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \end{cases}\right\} \Rightarrow x = \frac{3}{2}\pi$

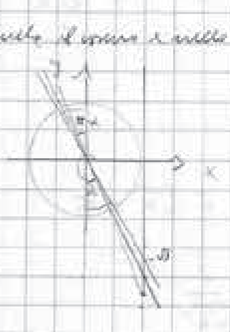
$\left.\begin{cases} \cos x = -1 \; \begin{matrix} x = \pi \\ x = \pi \end{matrix} \\ \sin x = 0 \; \begin{matrix} x = 0 \\ x = \pi \end{matrix} \end{cases}\right\} \Rightarrow x = \pi$

$\pi < x < \frac{3}{2}\pi$

Es n: 52 pag 331

$\sin x + 2\cos x < 0$

poiché $\cos x = 0$ non annulla il seno e nello stesso tempo ~~[illegible]~~



$tg\, x + 2 < 0$

$tg\, x < -2$

$tg\frac{2}{3}\pi = -\sqrt{3}$

$tg\frac{5}{3}\pi = -\sqrt{3}$

$tg\frac{23}{18}\pi \cong -1-\sqrt{3}$

$tg\frac{11}{18}\pi \cong -1-\sqrt{3}$

$\frac{23}{18}\pi < \alpha < \frac{5}{3}\pi$

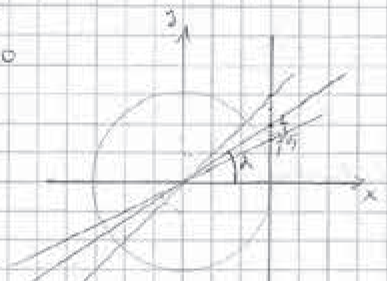
$\frac{2}{3}\pi < \pi - \alpha < \frac{11}{18}\pi$

$\frac{3}{2}\pi < x < \alpha$

$\frac{\pi}{2} < x < \pi - \alpha$

Es n: 53 pag 331

$3 \sin x - 2 \cos x > 0$



$3 \operatorname{tg} x - 2 > 0$

$\operatorname{tg} x > \frac{2}{3}$

$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4}$

$\frac{7}{6}\pi < \alpha + \pi < \frac{5}{4}\pi$

$\alpha < x < \frac{\pi}{2}$

$\alpha + \pi < x < \frac{3}{2}\pi$

Es n: 1 pag 920 (Analisi) Calcolare mediante gli integrali immediati il seguente integrale.

$$\int 5x^2 \, dx = \frac{5}{3} x^3 + k$$

$$D \, \frac{5}{3}x^3 + k = 5x^2$$

Es n: 2 pag 920

$$\int \frac{1}{x^3} \, dx = \int x^{-3} \, dx = \frac{1}{-2} \cdot x^{-2} + k = -\frac{1}{2x^2} + k$$

$$D \, -\frac{1}{2x^2} + k = \frac{4x}{4x^4} = \frac{1}{x^3}$$

Es n: 3 pag 920

$$\int 9 \sqrt[3]{x} \, dx = 9 \cdot \frac{1}{\frac{4}{3}} \cdot x^{\frac{4}{3}} + k = \frac{27}{4} \cdot x^{\frac{4}{3}} + k = \frac{27}{4} \cdot \sqrt[3]{x^4} + k$$

$$D \, \frac{27}{4} \cdot \sqrt[3]{x^4} + k = D \, \frac{27}{4} \cdot x^{\frac{4}{3}} + k = 9 x^{\frac{1}{3}} = 9 \sqrt[3]{x}$$

Es n: 4 pag 920

$$\int \sqrt[4]{x^3} \, dx = \int x^{\frac{3}{4}} \, dx = \frac{1}{\frac{7}{4}} \cdot x^{\frac{7}{4}} + k = \frac{4}{7} \cdot x^{\frac{7}{4}} = \frac{4}{7} \sqrt[4]{x^7}$$

$$D \, \frac{4}{7} \sqrt[4]{x^7} + k = D \, \frac{4}{7} \cdot x^{\frac{7}{4}} + k = x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$$

Es n: 5 pag 920

$$\int \frac{2}{\sqrt{x^5}} \, dx = \int 2 \cdot x^{-\frac{5}{2}} dx = 2 \cdot \frac{1}{-\frac{3}{2}} \cdot x^{-\frac{3}{2}} + k = -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} + k = -\frac{4}{3\sqrt{x^3}} + k$$

$$D \, -\frac{4}{3\sqrt{x^3}} + k = D \, -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} + k = D \, -\frac{4}{3} \cdot x^{-\frac{3}{2}} + k = -\frac{4}{3} \cdot -\frac{3}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}-1} = 2x^{-\frac{5}{2}} = \frac{2}{\sqrt{x^5}}$$

Es n: 6 pag 920

$$\int \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}} = \int \frac{1}{x^{\frac{5}{6}}} dx = \int x^{-\frac{5}{6}} dx = \frac{1}{-\frac{5}{6}+1} \cdot x^{-\frac{5}{6}+1} + k = \frac{1}{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{1}{6}} + k = 6 \cdot \sqrt[6]{x} + k$$

$$D \, 6 \sqrt[6]{x} + k = D \, 6 \cdot x^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} \cdot 6 \, x^{\frac{1}{6}-1} = x^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{x^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}$$

Es n: 7 pag 820

$\int x\sqrt[3]{x}\,dx = \int x\cdot x^{\frac{1}{3}}\,dx = \int x^{\frac{4}{3}}dx = \frac{1}{\frac{4}{3}+1}\cdot x^{\frac{4}{3}+1}+k = \frac{1}{\frac{7}{3}}\cdot x^{\frac{7}{3}}+k = \frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7}+k$

$D\ \frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7}+k = D\ \frac{3}{7}\cdot x^{\frac{7}{3}} = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^{\frac{7}{3}-1} = x^{\frac{4}{3}} = x\sqrt[3]{x}$

Es n: 8 pag 820

$\int x^3\cdot\sqrt[5]{x}\,dx = \int x^3\cdot x^{\frac{1}{5}}dx = \int x^{\frac{16}{5}}dx = \frac{1}{\frac{16}{5}+1}\cdot x^{\frac{16}{5}+1}+k = \frac{1}{\frac{21}{5}}\cdot x^{\frac{21}{5}}+k = \frac{5}{21}\cdot\sqrt[5]{x^{21}}+k$

$D\ \frac{5}{21}\cdot\sqrt[5]{x^{21}} = D\ \frac{5}{21}\cdot x^{\frac{21}{5}} = \frac{5}{21}\cdot\frac{21}{5}\cdot x^{\frac{21}{5}-1} = x^{\frac{16}{5}} = x^3\sqrt[5]{x}$

Es n: 9 pag 820

$\int\frac{1}{x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}}dx = \int\frac{1}{x^2\cdot x^{\frac{2}{3}}}dx = \int\frac{1}{x^{\frac{8}{3}}}dx = \int x^{-\frac{8}{3}}dx = \frac{1}{-\frac{8}{3}+1}\cdot x^{-\frac{8}{3}+1}+k = \frac{1}{-\frac{5}{3}}\cdot x^{-\frac{5}{3}}+k = -\frac{3}{5}\cdot x^{-\frac{5}{3}}+k =$

$k - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} = -\frac{3}{5\sqrt[3]{x^5}}+k$

$D\ -\frac{3}{5\sqrt[3]{x^5}}+k = -\frac{3}{5\cdot x^{\frac{5}{3}}} = \frac{3\cdot 5\cdot\frac{5}{3}\cdot x^{\frac{5}{3}-1}}{25\cdot x^{\frac{10}{3}}} = \frac{25\cdot x^{\frac{2}{3}}}{25\cdot x^{\frac{10}{3}}} = x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{-\frac{10}{3}} = x^{-\frac{8}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{8}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^8}} = \frac{1}{x^2\sqrt[3]{x^2}}$

Es n: 10 pag 820

$\int\frac{x}{\sqrt[7]{x^3}}dx = \int\frac{x}{x^{\frac{3}{7}}}dx = \int x\cdot x^{-\frac{3}{7}}dx = \int x^{\frac{4}{7}}dx = \int x^{\frac{4}{7}}dx = \frac{1}{\frac{4}{7}+1}\cdot x^{\frac{4}{7}+1}+k =$

NO $\cancel{\frac{1}{\frac{12}{7}}\cdot x^{\frac{12}{7}}+k = \frac{7}{12}\cdot\sqrt[7]{x^{12}}+k}$ NO

$\cancel{D\ \frac{7}{12}\sqrt[7]{x^{12}}+k = D\ \frac{7}{12}\cdot x^{\frac{12}{7}}+k = \frac{7}{12}\cdot\frac{12}{7}\cdot x^{\frac{12}{7}-1} = x^{\frac{5}{7}}}$

$= \frac{1}{\frac{11}{7}}\cdot x^{\frac{11}{7}}+k = \frac{7}{11}\sqrt[7]{x^{11}}+k$

$D\ \frac{7}{11}\cdot\sqrt[7]{x^{11}}+k = D\ \frac{7}{11}\cdot x^{\frac{11}{7}}+k = \frac{7}{11}\cdot\frac{11}{7}\cdot x^{\frac{11}{7}-1} = x^{\frac{4}{7}} = \frac{x}{\sqrt[7]{x^3}}$

Es n: 11 pag 820

$\int\frac{9}{x^7}dx = \int 9\,x^{-7}dx = \frac{9}{-7+1}\cdot x^{-7+1}+k = \frac{9}{-6}\cdot x^{-6}+k = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^6}+k = -\frac{3}{2x^6}+k$

$D\ -\frac{3}{2x^6}+k = D\ -\frac{3}{2}\cdot x^{-6}+k = -\frac{3}{2}\cdot -6\cdot x^{-7} = 9\cdot x^{-7} = \frac{9}{x^7}$

Es n: 12 pag 820

$\int 8x^2\sqrt[7]{x^5}\,dx = \int 8x^2\cdot x^{\frac{5}{7}}dx = \int 8\,x^{\frac{19}{7}}dx = \frac{8}{\frac{19}{7}+1}\cdot x^{\frac{19}{7}+1}+k = \frac{8}{\frac{26}{7}}\cdot x^{\frac{26}{7}}+k = \frac{28}{13}\cdot\sqrt[7]{x^{26}}+k$

$D\ \frac{28}{13}\sqrt[7]{x^{26}}+k = D\ \frac{28}{13}\cdot x^{\frac{26}{7}}+k = \frac{28}{13}\cdot\frac{26}{7}\cdot x^{\frac{26}{7}-1} = 8\cdot x^{\frac{19}{7}} = 8x^2\cdot\sqrt[7]{x^5}$

Es n: 161 pag 293

Fra tutti i triangoli aventi la stessa base a e avente costante l'angolo opposto α, qual'è quello di area massima?

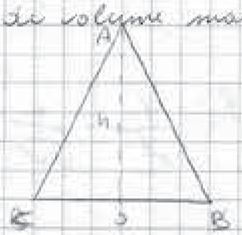
$AB = AC$, quindi tale triangolo richiesto è quello isoscele, h è massima

(α è costante).

Problema risolto per via geometrica

Es n: 187 pag 297

Di tutti i coni ~~[illegible]~~ nei quali è costante la somma a del raggio e dell'apotema, qual'è quello di volume massimo?



$\overline{AB} = x$

$\overline{OB} = y$

$x + y = a \Rightarrow y = a - x$

$\overline{AO} = h = \sqrt{(a-x)^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - 2ax}$

$$\begin{cases} V = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot \sqrt{a^2 - 2ax} \\ 0 < x < \frac{1}{2}a \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\sqrt{a}\,\sqrt{x^4(a-2x)}$$

$\frac{1}{3}\pi\sqrt{a}$ è costante, quindi il volume massimo si ha quando è massima l'espressione sotto radice

$$z = x^4(a-2x) = ax^4 - 2x^5$$

$$z' = 4ax^3 - 10x^4 = 2x^3(2a - 5x)$$

$$z' = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ et } x = \frac{2}{5}a$$

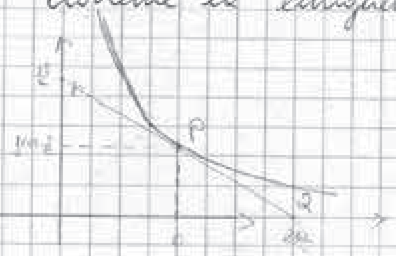
$$z'' = 12ax^2 - 40x^3$$

$$z''_{x=\frac{2}{5}a} = \frac{48}{25}a^3 - \frac{320}{125}a^3 = \frac{240-320}{125} < 0$$

quindi per $x = \frac{2}{5}a$ si ha il cono richiesto.

Es n° 123 pag 290

Scrivere l'equazione della tangente all'iperbole $y=\frac{9}{x}$ nel punto di ascissa $x=a$, con $a>0$. Determinare a in modo che il segmento di tangente compreso tra il punto di contatto e l'asse delle x sia minimo e trovarne la lunghezza.



$y=\frac{9}{x}$

$P\left(a,\frac{9}{a}\right)$

$y=mx+n$

$y-\frac{9}{a}=m(x-a)$

$\begin{cases} y=mx-ma+\frac{9}{a}\\ y=\frac{9}{x}\end{cases}$

$max^2-(ma^2-9)x-9a=0$

$\Delta=(ma^2-9)^2+36ma^2=m^2a^4-18ma^2+81+36ma^2=m^2a^4+18ma^2+81=0$

$m=\frac{-9a^2\pm\sqrt{81a^4-81a^4}}{a^4}=-\frac{9a^2}{a^4}=-\frac{9}{a^2}$

$y=-\frac{9}{a^2}x+\frac{9}{a}+\frac{9}{a}$

$y=-\frac{9}{a^2}x+\frac{18}{a}$ eq della tang all'iperbole nel punto di ascissa $x=a$

m della tangente è uguale alla derivata della f(x) nel punto P

$y'=-\frac{9}{x^2}$

$m=y'_{x=a}=-\frac{9}{a^2}$

$y=-\frac{9}{a^2}x+\frac{18}{a}$ tangente nel punto P

$Q(2a,0)$ intersezione tra il sistema $\begin{cases} y=0\\ y=-\frac{9}{a^2}x+\frac{18}{a}\end{cases}$

$\overline{PQ}^2=a^2+\frac{81}{a^2}$

pongo $\overline{PQ}^2=z \Rightarrow \begin{cases} z=a^2+\frac{81}{a^2}\\ a>0\end{cases}$ (All'aumentare di a, a^2 aumenta, ma $\frac{81}{a^2}$ diminuisce)

$z'=2a-\frac{162a}{a^4}=\frac{2a^5-162a}{a^4}=0 \Rightarrow 2a^5-162a=0 \Rightarrow a(2a^4-162)=0$

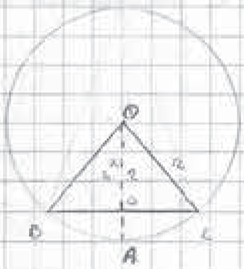
$a=0$ non ha senso

$a^4=81 \Rightarrow a=3$ minimo assoluto

$PQ=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

Es n° 182 pag 737

Fra tutti i coni aventi il vertice nel centro di una sfera di raggio 2 e la base variabile, sezione della sfera, qual è quello di volume massimo



pongo
$\overline{OO} = x$
$0 < x < 2$
$\overline{OC} = \sqrt{2^2 - x^2}$

$V = \frac{1}{3}\pi 2^2 h$

$$\begin{cases} V = \frac{1}{3}\pi(2^2 - x^2)\cdot x \\ 0 < x < 2 \end{cases}$$

$f(0) = 0$
$f(2) = 0$

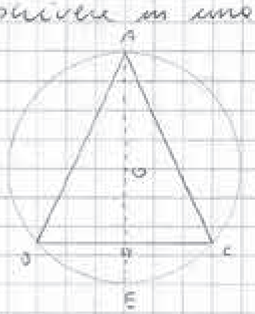
$V = \frac{1}{3}\pi(2^2x - x^3)$

$z = 2^2x - x^3$
$z' = -3x^2 + 2^2 = 0$
$x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$z'' = -6x$
$z''_{x=\frac{2\sqrt{3}}{3}} = -22\sqrt{3} < 0$

per $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ la funzione ha un massimo relativo, che se confrontato con i valori che la funzione assume agli estremi dell'intervallo è un massimo assoluto.

Es n° 183 pag 737

Inscrivere in una sfera di raggio 2 il cono rotondo di massimo volume.



pongo:
$\overline{AH} = x$
$0 < x < 22$

$V = \frac{1}{3}\pi 2^2 h$

$\overline{OH} = 2 - x$
$\overline{OB} = 2$
$\overline{BH} = \sqrt{2^2 - (2-x)^2} = \sqrt{22x - x^2}$ con $0 < x < 22$

$$\begin{cases} V = \frac{1}{3}\pi\cdot(22x - x^2)\cdot x \\ 0 < x < 22 \end{cases}$$

$f(0) = 0$
$f(22) = 0$

$V = \frac{1}{3}\pi(22x^2 - x^3)$, la funzione assume il valore massimo quando lo assume: $22x^2 - x^3$

$z = 22x^2 - x^3$

$z' = 42x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ et $x = \frac{4}{3}\pi$

$z'' = -6x + 42$
$z''_{x=0} = +42$ no

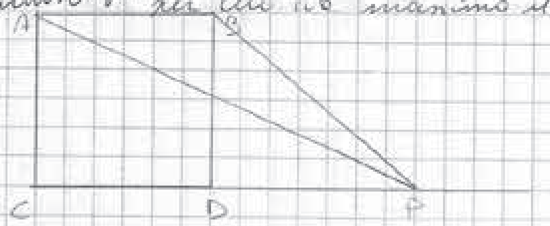
$z''_{x=\frac{4}{3}22} = 42 - 82 = -42$

per $x = \frac{4}{3}2$ la funzione ha un massimo relativo che, confrontato con i valori che la funzione assume agli estremi dell'intervallo, è un massimo assoluto.

60

Es n: 166 pag 734

Essendo dato un quadrato ABCD di lato a, trovare nel prolungamento del lato CD un punto P per cui sia massimo il rapporto $\frac{AP}{BP}$



$\overline{BC} = a$

pongo:

$\overline{CP} = x$

$\overline{AP} = \sqrt{x^2+a^2}$

$\overline{DP} = x-a$

$\overline{BP} = \sqrt{(x-a)^2+a^2} = \sqrt{x^2-2ax+2a^2}$

$$z = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2-2ax+2a^2}}$$

$z' =$

$$z' = \frac{2x(x^2-2ax+2a^2)-(x^2+a^2)(2x-2a)}{(x^2-2ax+2a^2)^2} = \frac{\cancel{2x^3}-4ax^2+4a^2x-\cancel{2x^3}-2a^2x+2ax^2+2a^3}{(x^2-2ax+2a^2)^2} =$$

$$\frac{-2ax^2+2a^2x+2a^3}{(x^2-2ax+2a^3)^2} = 0$$

$-2ax^2+2a^2x+2a^3=0$

$2ax^2-2a^2x-2a^3=0$

$$x = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4+4a^4}}{2a} = \frac{a^2 \pm a^2\sqrt{5}}{2a} \begin{cases} \frac{a-a\sqrt{5}}{2} \text{ n.a.} \\ \frac{a+a\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{2}(1+\sqrt{5}) \end{cases}$$

$$z'' = \frac{(-4ax+2a^2)(x^2-2ax+2a^2)^2+(2ax^2-2a^2x-2a^3)(2x-2a)\cdot 2(x^2-2ax+2a^2)}{(x^2-2ax+2a^2)^4}$$

Es n: 130 pag 790

Scrivere l'equazione della tangente all'iperbole $y=\frac{4}{x}$ nel punto di ascissa $x=a$, con $a>0$. Determinare a in modo che risulti minima la lunghezza del segmento intercettato dagli assi sulla tangente.

$P(a, \frac{4}{a})$ $\quad y=\frac{4}{x}$

$y-y_1=m(x-a)$

$y-\frac{4}{a}=m(x-a)$

$y'=-\frac{4}{x^2}$

$m=y'_{x=a}=-\frac{4}{a^2}$

$y=-\frac{4}{a^2}x+\frac{8}{a}$

Punto d'incontro con l'asse delle x:

$\begin{cases} y=-\frac{4}{a^2}x+\frac{8}{a} \\ y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=2a \\ y=0 \end{cases}$ $\quad Q(2a, 0)$

Punto d'incontro con l'asse delle y:

$\begin{cases} y=-\frac{4}{a^2}x+\frac{8}{a} \\ x=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{8}{a} \end{cases}$ $\quad R(0, \frac{8}{a})$

$\overline{RQ}^2=4a^2+\frac{64}{a^2}$ con $a>0$

$z=4a^2+\frac{64}{a^2}$

$z'=8a-\frac{128a}{a^4}=\frac{8a^5-128a}{a^4}=\frac{8a(a^4-16)}{a^4}=0$

$8a=0 \Rightarrow a=0$ non ha significato

$a^4-16=0 \Rightarrow a=2$

$\overline{RQ}=4\sqrt{2}$

61

Es n° 167 pag 734

È dato una circonferenza di centro O e raggio r. Si conduce una corda BC ad una distanza x dal centro O, e poi si costruisce il triangolo equilatero ABC, il cui vertice A sia dalla parte opposta al centro O rispetto a BC. Determinare x in modo che risulti minimo il segmento OA.

pongo:

$\overline{OM} = x \qquad 0<x<r$

$\overline{MB} = \sqrt{r^2 - x^2}$

$h = \overline{AM} = \sqrt{3}\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{3r^2 - 3x^2}$

$\overline{AO} = \sqrt{3r^2 - 3x^2} - x$

pongo $y = \sqrt{3r^2 - 3x^2} - x$

$y(0) = r\sqrt{3}$

$y(r) = -r$

$$y' = -\frac{3x}{\sqrt{3r^2 - 3x^2}} - 1 = 0$$

$-3x - \sqrt{3r^2 - 3x^2} = 0$

$-3x = \sqrt{3r^2 - 3x^2}$

$3x^2 = 3r^2 - 3x^2$

$x^2 = \frac{r^2}{4}$

$x = \pm\frac{r}{2}$

$x = \frac{r}{2}$

$$y'' = -3 + \frac{3x}{\sqrt{3r^2 - 3x^2}}$$

$y''_{x=\frac{r}{2}} = -3 + 1 = -2 < 0$

per $x = \frac{r}{2}$ la funzione ha un minimo relativo

Es n: 131 pag 239

Per quale valore di a è minimo il coefficiente angolare della tangente alla curva $y = x^4+3x^3-6x^2-3x$, nel punto di ascissa $x=a$

$y' = 4x^3+9x^2-12x-3$

$y'_{x=a} = 4a^3+9a^2-12a-3$

$z = 4a^3+9a^2-12a-3$

$z' = 12a^2+18a-12 = 0$

$a = \frac{-3 \pm \sqrt{81+144}}{12} = \frac{-3 \pm 15}{12} \begin{cases} -2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

$z'' = 24a+18$

$z''_{a=-2} = -48+18<0$ massimo valore

$z''_{a=\frac{1}{2}} = 12+18>0$ minimo valore

Es n: 134 pag 238

Un triangolo rettangolo ruota attorno all'ipotenusa costante a. Quale deve essere l'altezza relativa all'ipotenusa perché la differenza dei coni generati dai due triangoli, in cui l'altezza decompone il primo triangolo, sia massimo?

$\overline{DB} = x \quad 0<x<a$

$\overline{DC} = \sqrt{x(a-x)}$ teorema di euclide (II)

$V_1 = \frac{1}{3}\pi[x(a-x)]\cdot(a-x)$

$V_2 = \frac{1}{3}\pi[x(a-x)]\cdot x$

$V = \frac{1}{3}\pi[x(a-x)^2] - \frac{1}{3}\pi[x^2(a-x)] \qquad f(0)=0 \text{ e } f(a)=0$

$V = \frac{1}{3}\pi[x(a-x)^2 - x^2(a-x)]$

$z = x(a-x)^2 - x^2(a-x) = x(a^2-2ax+x^2) - ax^2+x^3 = a^2x-2ax^2+x^3-ax^2+x^3 =$
$2x^3-3ax^2+a^2x$

$z' = 6x^2-6ax+a^2=0$

$x = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2-6a^2}}{6} = \frac{3a \pm a\sqrt{3}}{6} \begin{cases} \frac{3a-a\sqrt{3}}{6} \\ \frac{3a+a\sqrt{3}}{6} \end{cases}$

$z'' = 12x-6a$

$z''_{x=\frac{3a-a\sqrt{3}}{6}} = 6a-2a\sqrt{3}-6a<0$

$z''_{x=\frac{3a+a\sqrt{3}}{6}} = 6a+2a\sqrt{3}-6a>0$

per $x = \frac{1}{6}a(3-\sqrt{3})$ la funzione ha un massimo assoluto

62) $\overline{OC} = \sqrt{x(a-x)} = \sqrt{\frac{1}{6}a(3-\sqrt{3})\left(a - \frac{3a-a\sqrt{3}}{6}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{6}a\right)\left(\frac{3a+a\sqrt{3}}{6}\right)} = \sqrt{\frac{3a-a\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{3a+a\sqrt{3}}{6}} =$

$\sqrt{\frac{9a^2-3a^2}{36}} = \sqrt{\frac{6a^2}{36}} = \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

Esercizio

$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + c$ difatti $D\left(\frac{1}{2}e^{2x}+c\right) = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2 = e^{2x}$

Eser 50 pag 322

$\int \frac{\text{sen}\,2x}{1+\text{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{2\,\text{sen}\,x\cos x}{1+\text{sen}^2 x}\,dx = \lg(1+\text{sen}^2 x)+c$, difatti $D(1+\text{sen}^2x) = 2\,\text{sen}\,x\cos x$.

Esercizio: prima formula

$\int \frac{x}{x^2+5}\,dx = \int \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+5} = \frac{1}{2}\lg(x^2+5)+c.$

Esercizio prima formula

$\int [\cos f(x)]\, f'(x)\,* = \text{sen}\, f(x)+c$

difatti:

$D\ \text{sen}\, f(x)+c = \cos f(x)\cdot f'(x)$ $\cos 2x^2$ $\text{sen}\,2x^5\cdot 4x$

Esercizio prima formula

$\int [\text{sen}\, f(x)]\cdot f'(x)\,* = -\cos f(x)+c$

Esercizio: prima formula

$\int \cos 2x\,dx = \int \frac{1}{2}\cos 2x\cdot 2\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\cdot 2\,dx = \frac{1}{2}\text{sen}\,2x+c$

Esercizio prima formula

$\int 4\,dx = 4x$

di fatti:

$D\,4x = 4$

Esercizio prima formula

$\int \text{sen}^5 x\cdot\cos x\,dx = \frac{1}{6}\text{sen}^6 x+c$

di fatti:

$D\,\frac{1}{6}\text{sen}^6 x + c = \frac{1}{6}\cdot 6\,\text{sen}^5 x\cos x = \text{sen}^5 x\cos x$

PS

$* = dx$

Esercizio:

→ integrazione per parti *

$$\int x \cdot \operatorname{sen} x \, dx = x \cdot -\cos x - \int 1 \cdot -\cos x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + c$$

Infatti:

$$D(-x \cos x + \operatorname{sen} x + c) = -\cos x + x \operatorname{sen} x + \cos x = x \operatorname{sen} x$$

Esercizio

integrazione per parti *

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x \, dx = \operatorname{sen} x \cdot \cos x - \int \cos x \cdot -\cos x \, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x \, dx =$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + x + c - \int \operatorname{sen}^2 x \, dx.$$

Dunque:

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + x + c - \int \operatorname{sen}^2 x \, dx$$

$$2 \int \operatorname{sen}^2 x \, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + x + c$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} x \cos x + \frac{1}{2} x + c$$

Infatti:

$$D\left(-\frac{1}{2} \operatorname{sen} x \cos x + \frac{1}{2} x + c\right) = -\frac{1}{2}(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(1 - 2\operatorname{sen}^2 x) + \frac{1}{2} = \cancel{-\frac{1}{2}} + \operatorname{sen}^2 x \cancel{+\frac{1}{2}} = \operatorname{sen}^2 x.$$

Es n: 21 pag 821

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+3} \, dx = \lg (x^2+x+3) + c$$

Es n: 22 pag 821

$$\int 2x \operatorname{sen} x^2 \, dx = -\cos x^2 + c$$

Es n: 23 pag 821

$$\int x^3 \operatorname{sen} x^4 \, dx = \int \frac{1}{4} \cdot 4x^3 \operatorname{sen} x^4 \, dx = \frac{1}{4} \int 4x^3 \operatorname{sen} x^4 \, dx = \frac{1}{4} \cdot -\cos x^4 = -\frac{1}{4} \cos x^4 + c$$

Es n: 24 pag 821

$$\int x^2 \cos x^3 \, dx = \int \frac{1}{3} \cdot 3x^2 \cos x^3 \, dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 \cos x^3 \, dx = \frac{1}{3} \operatorname{sen} x^3 + c$$

Es n: 25 pag 821

$$\int \cos^5 x \operatorname{sen} x \, dx = -\int \cos^5 x \cdot -\operatorname{sen} x \, dx = -\frac{1}{6} \cos^6 x + c$$

Es n: 26 pag 821

$$\int \frac{1}{\cos^2 x^3} x^2 \, dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{\cos^2 x^3} = \frac{1}{3} \lg \cos^2 x^3 + c$$

Es n: 29 pag 821

$$\int \cos x \sqrt{1 + \operatorname{sen} x} \, dx = \int \cos x (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{3}{2}} + c$$

Es n: 30 pag 821

$$\int \frac{\lg x}{x} \, dx = \int \lg x \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{1}{2} \lg^2 x + c$$

Es n: 207 pag 831 — integ. x parti — INTEGRAZIONE PER PARTI *

$$\int x \cos x \, dx = x \cdot \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx = x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x + c \leftarrow \text{PER PARTI *}$$

Verifica:

$$D(\cancel{\operatorname{sen} x} + x \cos x - \cancel{\operatorname{sen} x}) = x \cos x$$

Es n: 208 pag 831 — integ. per parti

$$\int x \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c \quad \text{verifica} \quad D(xe^x - e^x) = \cancel{e^x} + xe^x - \cancel{e^x} = xe^x$$

Es n: 211 pag 831 — integrazione per parti *

no
$$\int x \operatorname{sen} 3x \, dx = -\frac{1}{3} x \cos 3x - \frac{1}{3} \int -\cos 3x \, dx = \frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \operatorname{sen} 3x$$

Verifica

$$D\left(\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \operatorname{sen} 3x\right) = \cancel{\cos 3x + x \operatorname{sen} 3x + \cos 3x = x \operatorname{sen} 3x}$$

Es n: 210 pag 830 — int. per parti *

$\int \operatorname{arctg} x \, dx$ assumo $\operatorname{arctg} x$ come fattore finito e $1 dx$ come fattore differenziale.

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \operatorname{arctg} x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} - \frac{1}{2} \lg(1+x^2) + c$$

Verifica:

$$D\left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \lg(1+x^2) + c\right] = \operatorname{arctg} x + x \frac{1}{\cancel{1+x^2}} - \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{1+x^2}} \cancel{2}x = \operatorname{arctg} x$$

Es n: 209 pag 830 — int. per parti *

$$\int \lg x \, dx = x \lg x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \lg x - x + c$$

Verifica

$$D(x \lg x - x) = \lg x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \lg x + 1 - 1 = \lg x$$

Es n: 212 pag 830

$\int x^2 \lg x \, dx$ assumo $\lg x$ come fattore finito e $x^2 dx$ come fattore differenziale.

$$\int x^2 \lg x \, dx = \lg x \cdot \frac{1}{3} x^3 - \int \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \lg x \cdot \frac{1}{3} x^3 - \int \frac{x^2}{3} dx = \lg x \cdot \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{3} \int x^2 dx =$$

$$\lg x \cdot \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} x^3 = \frac{1}{3}\left(x^3 \lg x - \frac{1}{3} x^3\right) + c$$

Verifica:

$$D\left[\frac{1}{3}\left(x^3 \lg x - \frac{1}{3} x^3\right) + c\right] = D\left[\frac{x^3}{3} \lg x - \frac{x^3}{9}\right] = \frac{3x^2}{3} \lg x + \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} - \frac{27x^2}{81} = x^2 \lg x + \cancel{\frac{x^2}{3}} - \cancel{\frac{x^2}{3}} = x^2 \lg x$$

Es n: 213 pag 830

$$\int \sqrt{x} \lg x \, dx = \lg x \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} dx = \lg x \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \int x^{-1} \cdot x^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \lg x \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \lg x \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{9} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \lg x \cdot \sqrt{x^3} - \frac{4}{9} \sqrt{x^3} + c$$

$$D\left(\frac{2}{3} \lg x \cdot \sqrt{x^3} - \frac{4}{9} \sqrt{x^3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} \lg x \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} + \lg x \cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \lg x$$

Es n: 34 pag 821

$$\int (1+\cos x)^5 \operatorname{sen} x \, dx = -\int (1+\cos x)^5 \cdot -\operatorname{sen} x \, dx = -\frac{1}{6}(1+\cos x)^6 + c$$

D di b^x con x costante ved pag 135

$$D\, b^x = \lim_{h\to 0} \frac{b^{(x+h)} - b^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{b^x \cdot b^h - b^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{b^x (b^h - 1)}{h} = b^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{b^h - 1}{h} =$$

$$= b^x \lg_e b$$

$$D\, b^x = b^x \cdot \lg_e b$$

$\boxed{\text{Funzioni inverse}}$

La funzione di partenza deve essere iniettiva

Ex: $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$ funzione inversa: $\cancel{x} = +\sqrt{f(x)}$

$\begin{cases} y = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$ $P(3,9)$

$y' = 2x$

$y'_P = 6$

$x = +\sqrt{y}$ $P(3,9)$

$x' = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$

$x'_P = \dfrac{1}{2\sqrt{9}} = \dfrac{1}{6}$

Teorema:

$y = f(x) \Rightarrow x = \varphi(y)$

$y' = f'(x) \Rightarrow x' = \varphi'(y)$

$y' = \dfrac{1}{x'}$

Funzioni inverse

$y = \operatorname{arctg} x$

$x = \operatorname{tg} y$

$x' = \dfrac{1}{\cos^2 y}$

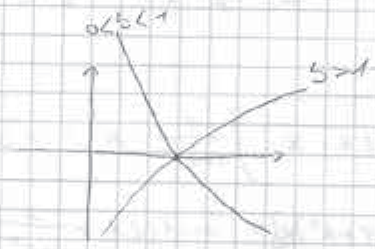
metodo di inversione funzionale

$y' = \dfrac{1}{x'} = \dfrac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y =$ $\quad\left[\cos\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \right.$

$= \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2(y)} = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\begin{cases} y = \operatorname{arctg} x \\ y' = \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$$



$y = \log_b x$

$x = b^y$

$x' = b^y \cdot \log_e b$

$y' = \dfrac{1}{x'} = \dfrac{1}{b^y \cdot \log_e b} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\log_e b} = \dfrac{1}{x} \cdot \log_b e$

Es:

$y = x^x$ $\qquad$ u $\quad y = b^x \Rightarrow y' = b^x \cdot \log_e b$

$\log_b y = \log_b x^x$ $\qquad$ e $\quad y = x^7 \Rightarrow y' = 7x^6$

$\log_b y = x \log_b x$

$y = b^{x \log_b x}$

$y' = b^{x \log_b x} \cdot \log_e b \left[1 \log_b x + x\left(\frac{1}{x} \cdot \log_b e\right) \right] = x^x \left(\log_e b \cdot \log_b x + 1 \right).$

$y = x^n$

$\lg y = \lg x^n$ (in base e)

$\lg y = n \lg x$

$y = e^{n \lg x}$

$y' = e^{n \lg x} \cdot \frac{n}{x}$

$y' = \frac{n}{x} \cdot (e^{n \lg x})$

$y' = \frac{n}{x} \cdot y = \frac{n}{x} \cdot x^n = n x^{n-1}$

Esempio:

$$\int \frac{x+5}{x^2+1}\,dx = \int \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{5}{x^2+1}\right) dx = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{5}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + 5\int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} \lg(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + c.$$

$$D\left[\frac{1}{2}\lg(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + c\right] = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}x}{x^2+1} + \frac{5}{x^2+1} = \frac{5+x}{x^2+1}.$$

Es n: 221 pag 831:

$$\int \operatorname{arctg} 2x\,dx = \operatorname{arctg} 2x \cdot x - \int \frac{1}{1+x^2} \cdot x = x \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{2} \lg(1+x^2) + c$$

$$D\left[x \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{2}\lg(1+x^2) + c\right] = \operatorname{arctg} 2x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \operatorname{arctg} 2x$$

Es n: 238 pag 831

$$\int x\, \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int x \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot x - x\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \overset{g}{x}\,dx - \frac{1}{2}x^2 + c = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,dx - \frac{1}{2}x^2 + c =$$

$$x \operatorname{tg} x + \lg|\cos x| - \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$D\left(x \operatorname{tg} x + \lg|\cos x| - \frac{1}{2}x^2 + c\right) = \operatorname{tg} x \overset{*}{+} \frac{x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos x} \cdot \overset{*}{-} \operatorname{sen} x - x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{x}{\cos^2 x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - x =$$

$$= \frac{x}{\cos^2 x} - x = \frac{x - x\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{x(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{x \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = x \operatorname{tg}^2 x.$$

Es n: 233 pag 831: NO

$$\int \overset{g}{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}\,dx = \operatorname{arcsen}\sqrt{x} \cdot x - \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = x \operatorname{arcsen}\sqrt{x} + \lg\sqrt{1-x} + c$$

$$D\left(x \operatorname{arcsen}\sqrt{x} + \lg\sqrt{1-x} + c\right) = \operatorname{arcsen}\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot -1$$

Es n: 243 pag 831:

$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int \frac{1}{e^x + \frac{1}{e^x}}\,dx = \int \frac{1}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}}\,dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \operatorname{arctg} e^x + c$$

$$D \operatorname{arctg} e^x = \frac{1}{1+e^{2x}} \cdot e^x$$

NB: $D \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}$ & $D \cos x = -\operatorname{sen} x$

65 Esercizio n° 214/pg 350

$$\int x \cdot e^{2x}\,dx = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + c = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$$

Insiemi a due dimensioni:

Un insieme di punti è limitato quando esiste un cerchio o un ~~[illegible]~~ rettangolo che contengono tutti i punti dell'insieme.

Un intorno del punto

Un punto è un punto di accumulazione dell' ~~insieme~~ ambiente se in un intorno del punto cadono infiniti punti dell'insieme.

Si dice che un punto P (Q) è interno (esterno) a un insieme I se esiste almeno un intorno di P (Q) (cerchio o rettangolo) i cui punti (non) appartengono tutti all'insieme I.

Un punto di un insieme I si dice di frontiera se non è interno né esterno.

Gli insiemi dei punti di frontiera sono la frontiera.

Un insieme si dice aperto se coincide col proprio interno.

L'insieme dei punti di accumulazione dell'insieme si dice derivato dell'insieme.

Se la frontiera fa parte dell'insieme, l'insieme si dice chiuso.

Un insieme aperto si dice dominio se tutti i suoi punti sono punti di accumulazione di punti interni.

Es n: 215 pag 830

$$\int \overset{f}{x}\cos 2x\,dx = x\,\tfrac12 \sin 2x - \int \tfrac12 \sin 2x\,dx = \tfrac12 x \sin 2x + \tfrac14 \cos 2x + c$$

$$D\left(\tfrac12 x \sin 2x + \tfrac14 \cos 2x + c\right) = \tfrac12 \sin 2x + \tfrac12 x \cos 2x \cdot 2 + \tfrac14 \cdot -\sin 2x \cdot 2 = \cancel{\tfrac12 \sin 2x} + x\cos 2x - \cancel{\tfrac12 \sin 2x} = x\cos 2x$$

Es n: 223 pag 831

$$\int e^x \overset{f}{\sin x}\,dx = e^x \sin x - \int e^x \overset{f}{\cos x}\,dx = e^x \sin x - \left[e^x \cos x - \int -\sin x \cdot e^x dx\right] = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x$$

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx$$

$$2\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x + c$$

$$\int e^x \sin x\,dx = \tfrac12 e^x \sin x - \tfrac12 e^x \cos x + c$$

$$D\left(\tfrac12 e^x \sin x - \tfrac12 e^x \cos x + c\right) = \tfrac12 e^x \sin x + \cancel{\tfrac12 e^x \cos x} - \cancel{\tfrac12 e^x \cos x} + \tfrac12 e^x \sin x = e^x \sin x$$

Es n: 218 pag 830:

$$\int \overset{f}{x^2} \cos x\,dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x\,dx = x^2 \sin x - 2\int \overset{f}{x} \sin x\,dx = x^2 \sin x - 2\left[-x\cos x - \int -\cos x\,dx\right] =$$

$$x^2 \sin x - 2\left[-x\cos x + \int \cos x\,dx\right] = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$$

$$D\left(x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c\right) = \cancel{2x\sin x} + x^2\cos x + \cancel{2\cos x} - \cancel{2x\sin x} - \cancel{2\cos x} = x^2 \cos x$$

Es n: 219 pag 830:

$$\int \overset{f}{x^2} \sin x\,dx = -x^2\cos x - \int 2x \cdot -\cos x\,dx = -x^2\cos x + 2\int \overset{f}{x}\cos x\,dx = -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin x\,dx\right] =$$

$$-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c.$$

$$D\left(-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c\right) = -\cancel{2x\cos x} + x^2\sin x + \cancel{2\sin x} + \cancel{2x\cos x} - \cancel{2\sin x} = x^2 \sin x.$$

Es n: 217 pag 830

$$\int \overset{f}{x^2} e^x\,dx = x^2 e^x - \int 2x e^x\,dx = x^2 e^x - 2\left[x e^x - \int e^x dx\right] = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$$

$$D\left(x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c\right) = \cancel{2xe^x} + x^2 e^x - \cancel{2e^x} - \cancel{2xe^x} + \cancel{2e^x} = x^2 e^x.$$

Es n: 222 pag 831

$$\int x^{-5} \lg x\,dx = -\tfrac14 \lg x \cdot \tfrac{1}{x^4} - \int \tfrac1x \cdot -\tfrac{1}{4x^4}\,dx = -\tfrac14 \lg x \cdot \tfrac{1}{x^4} + \tfrac14 \int \tfrac{1}{x^5}\,dx = -\tfrac{1}{4x^4} \lg x + \tfrac14 \cdot -\tfrac{1}{4x^4} = -\tfrac{1}{4x^4} \lg x - \tfrac{1}{16x^4} + c$$

$$D\left(-\tfrac{1}{4x^4} \lg x - \tfrac{1}{16x^4} + c\right) = \tfrac{16x^3}{16x^8} \lg x - \tfrac{1}{4x^5} + \tfrac{64x^3}{256x^8} = \tfrac{1}{x^5} \lg x = x^{-5} \lg x$$

Es n: 226 pag 831

$$\int \overset{f}{\operatorname{arctg}} x\,dx = x \operatorname{arctg} x - \int (x^2+1)\cdot 2x \cdot x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \int 2x^2(x^2+1)\,dx = x\operatorname{arctg} x - \left[(x^2+1)\cdot\tfrac23 x^3 - \int \tfrac23 x^3 \cdot 2x\,dx\right] =$$

$$x\operatorname{arctg} x - \tfrac23 x^3(x^2+1) + \tfrac43 \int x^4 dx = x\operatorname{arctg} x - \tfrac23 x^3(x^2+1) + \tfrac43 \cdot \tfrac15 x^5 = x\operatorname{arctg} x - \tfrac23 x^3 (x^2+1) + \tfrac{4}{15} x^5 + c.$$

$$D\left(x\operatorname{arctg} x - \tfrac23 x^3(x^2+1) + \tfrac{4}{15}x^5 + c\right) = \operatorname{arctg} x + x(x^2+1)\cdot 2x - \tfrac23 \cdot 3x^2(x^2+1) - \tfrac23 \cdot x^3 \cdot 2x + \tfrac{4}{15}\cdot 5x^4 =$$

$$\operatorname{arctg} x + 2x^2\cancel{(x^2+1)} - 2x^2\cancel{(x^2+1)} - \tfrac43 x^4 + \tfrac43 x^4 = \operatorname{arctg} x \quad \left[\text{NB } D \operatorname{arctg} x = x^2+1;\ D\operatorname{arctg} x = \tfrac{1}{1+x^2}\right]$$

66 Es n. 24 pag 856

Si trovino i coefficienti della funzione:

$$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

sapendo che:

1) esso si annulla per $x = 0$;

2) la sua derivata prima si annulla per $x=0$, $x=1$, $x=2$.

$e = 0$

$y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$d = 0$

$$\begin{cases} 4a + 3b + 2c = 0 \\ 32a + 12b + 4c = 0 \\ -4a + 3b - 2c = -1 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$6b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{6}$

$$\begin{cases} 4a + 2c = \frac{1}{2} \\ 32a + 4c = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8a + 4c = 1 \\ 32a + 4c = 2 \end{cases} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$24a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{24}$

$\frac{1}{3} + 4c = 1$

$c = \frac{1}{6}$

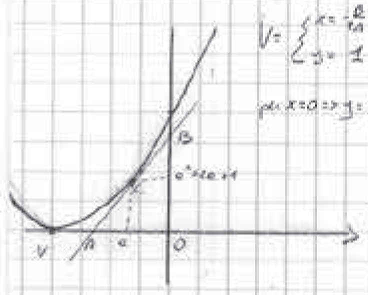
$y = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6}$

Problema

In un R.C.O è dato la parabola di equazione:

$$y = x^2 + 2x + 1$$

Si scriva l'equazione della retta che, nella regione finita di piano limitata dalla stessa parabola e dagli assi, sia tangente alla curva e formi con gli assi il triangolo di area massima



$V = \begin{cases} x = -\frac{2}{2} = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

per $x = 0 \Rightarrow y = 1$

Considero il punto $C(a, a^2+2a+1)$ ~~tangente alla~~ della parabola e calcolo l'equazione della tangente alla parabola passante per C.

$y = x^2 + 2x + 1$

$y' = 2x + 2$

$y'_{x=a} = 2a + 2$ coefficiente dell'equazione della tangente alla parabola in C.

$y - a^2 - 2a - 1 = (2a+2)(x-a)$

$y = 2ax + 2x - 2a^2 - \cancel{2a} + a^2 + \cancel{2a} + 1$

$\begin{cases} y = (2a+2)x + 1 - a^2 & \text{eq. della tangente alla parab. in C} \\ y = x^2 + 2x + 1 \end{cases}$

$x^2 + 2x + \cancel{1} = (2a+2)x + \cancel{1} - a^2$

$x^2 - 2ax + 2x + a^2 = 0$

$x^2 - 2(a-1)x + a^2 = 0$

$\Delta = (a-1)^2 - a^2 = \cancel{a^2} - 2a + 1 - \cancel{a^2} = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

$y = x + \frac{3}{4}$ equazione della tangente alla parabola in C.

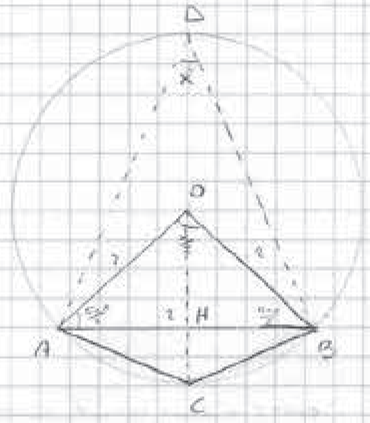
$\begin{cases} y = x + \frac{3}{4} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{3}{4}. \quad A\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$

$\begin{cases} y = x + \frac{3}{4} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{3}{4} \quad B\left(0, \frac{3}{4}\right)$

$\overline{AO} = \overline{BO}$ perciò il triangolo AOB è un triangolo rettangolo isoscele.

6) Problema:

Dato in una circonferenza di raggio r l'angolo al centro $A\hat{O}B$, si costruisca sulla corda AB, dalla parte opposta rispetto al centro O, il triangolo isoscele ABC avente per base AB e per altezza $\overline{CH} = 2k\overline{AB}$. Si determini il valore dell'angolo $A\hat{O}B$ per il quale il quadrilatero $OACB$ ha area massima.
Si calcoli poi il valore di k per cui l'ampiezza dell'angolo $O\hat{A}B$ del quadrilatero ottenuto è $\frac{5}{6}\pi$ (150°).



$A\hat{O}B = x \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\overline{AB} = 2r \sin x \qquad \overline{CH} = 4kr \sin x$

Area $AOB = \frac{1}{2} r^2 \sin\frac{x}{2}$

Area $ABC = 2r \sin x \cdot 4kr \sin x \cdot \frac{1}{2} = 2kr^2 \sin^2 x = 2kr^2 \cdot 4 \sin^2\frac{x}{2} \cos^2\frac{x}{2}$

Es n° 248 pag 232

$$\int_0^2 (3x^2+2x-1)\,dx$$

$$\int (3x^2+2x-1)\,dx = x^3+x^2-x+c$$ dove c è una costante qualunque

$$\int_0^x (3x^2+2x-1)\,dx = x^3+x^2-x+k$$ dove k è una opportuna costante da determinare

$$\int_0^0 (3x^2+2x-1)\,dx = k$$

$$k=0$$

$$\int_0^x (3x^2+2x-1)\,dx = x^3+x^2-x$$

$$\int_0^2 (3x^2+2x-1)\,dx = 8+4-2 = 10$$

Es n° 249 pag 832

$$\int_{-3}^5 3\sqrt{4+x}\,dx$$

$$\int 3\sqrt{4+x}\,dx = 3\int \sqrt{4+x}\,dx = 3\int (4+x)^{\frac{1}{2}}dx = 3\cdot\frac{2}{3}\cdot(4+x)^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{(4+x)^3}+C$$ dove c è una costante qualunque

$$\int_{-3}^x 3\sqrt{4+x}\,dx = 2\sqrt{(4+x)^3}+k$$ dove k è una opportuna costante da determinare

$$\int_{-3}^{-3} 3\sqrt{4+x}\,dx = 2+k$$

$$0 = 2+k \Rightarrow k=-2$$

$$\int_{-3}^x 3\sqrt{4+x}\,dx = 2\sqrt{(4+x)^3}-2$$

$$\int_{-3}^5 3\sqrt{4+x}\,dx = 2\cdot\sqrt{729}-2 = 2\cdot 27-2 = 52$$

Es n° 250 pag 232

$$\int_0^1 (1+2x)^2\,dx$$

$$\int (1+2x)^2\,dx = \frac{1}{6}(1+2x)^3+c$$ dove c è una costante qualunque.

$$\int_0^x (1+2x)^2\,dx = \frac{1}{6}(1+2x)^3+k$$ dove k è una opportuna costante da determinare.

$$\int_0^0 (1+2x)^2\,dx = \frac{1}{6}+k$$

$$0 = \frac{1}{6}+k \Rightarrow k=-\frac{1}{6}$$

$$\int_0^x (1+2x)^2\,dx = \frac{1}{6}(1+2x)^3-\frac{1}{6}$$

$$\int_0^1 (1+2x)^2\,dx = \frac{1}{6}3^3-\frac{1}{6} = \frac{27}{6}-\frac{1}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$$

Esercizio

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$ dove c è una costante qualunque (integrale indefinito)

$\int_0^{x} \sin x \, dx = -\cos x + k \quad (1)$ dove k è una opportuna costante da determinare

$$\int_0^{0} \sin x \, dx = -\cos 0 + k$$

$$0 = -1 + k \Rightarrow k = 1$$

Sostituisco nella (1)

$$\int_0^{x} \sin x \, dx = -\cos x + 1$$

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos \pi + 1 = -(-1) + 1 = 2$$

Es n° 251 pag 232

$$\int_{-1}^{1} \left(3x^2 - \frac{x}{2} + 1\right) dx$$

$\int \left(3x^2 - \frac{x}{2} + 1\right) dx = x^3 - \frac{1}{4}x^2 + x + c$ dove c è una costante qualunque

$\int_{-1}^{x} \left(3x^2 - \frac{x}{2} + 1\right) dx = x^3 - \frac{1}{4}x^2 + x + k$ dove k è una opportuna costante da determinare

$$\int_{-1}^{-1} \left(3x^2 - \frac{x}{2} + 1\right) dx = -\frac{9}{4} + k$$

$$0 = -\frac{9}{4} + k \Rightarrow k = \frac{9}{4}$$

$$\int_{-1}^{x} \left(3x^2 - \frac{x}{2} + 1\right) dx = x^3 - \frac{1}{4}x^2 + x + \frac{9}{4}$$

$$\int_{-1}^{1} \left(3x^2 - \frac{x}{2} + 1\right) dx = 1 - \frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4} = 4$$

Es n° 252 pag 232

$$\int_1^2 (x^2 - x + 2) dx$$

$\int (x^2 - x + 2) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + c$ dove c è una costante qualunque

$\int_1^x (x^2 - x + 2) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + k$ dove k è una opportuna costante da determinare

$$\int_1^1 (x^2 - x + 2) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + k$$

$$\int_1^1 (x^2 - x + 2) dx = \frac{11}{6} + k$$

$$0 = \frac{11}{6} + k \Rightarrow k = -\frac{11}{6}$$

$$\int_1^x (x^2 - x + 2) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{11}{6}$$

$$\int_1^2 (x^2 - x + 2) dx = \frac{8}{3} - 2 + 4 - \frac{11}{6} = \frac{16 - 12 + 24 - 11}{6} = \frac{17}{6}$$

Es n=253 pag 832

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (4x+1)^3$$

$$\int (4x+1)^3 dx = \frac{1}{16}(4x+1)^4 + c$$ dove c è una costante qualunque

$$\int_0^x (4x+1)^3 dx = \frac{1}{16}(4x+1)^4 + k$$ dove k è una opportuna costante da determinare

$$\int_0^0 (4x+1)^3 dx = \frac{1}{16} + k$$

$$0 = \frac{1}{16} + k \Rightarrow k = -\frac{1}{16}$$

$$\int_0^x (4x+1)^3 dx = \frac{1}{16}(4x+1)^4 - \frac{1}{16}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (4x+1)^3 dx = \frac{1}{16}\cdot 3^4 - \frac{1}{16} = \frac{81}{16} - \frac{1}{16} = \frac{80}{16} = 5$$

Es n=254 pag 832

$$\int_{-1}^{1} (x^3-2x^2)\, dx$$

$$\int (x^3-2x^2)\, dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + c$$ dove c è una costante qualunque

$$\int_{-1}^{x} (x^3-2x^2)\, dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + k$$ dove k è una opportuna costante da determinare

$$\int_{-1}^{-1} (x^3-2x^2)\, dx = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + k$$

$$0 = \frac{11}{12} + k \Rightarrow k = -\frac{11}{12}$$

$$\int_{-1}^{x} (x^3-2x^2)\, dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{11}{12}$$

$$\int_{-1}^{1} (x^3-2x^2)\, dx = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{11}{12} = \frac{3-8-11}{12} = -\frac{16}{12} = -\frac{4}{3}$$

Es n=255 pag 832

$$\int_{\frac{1}{2}}^{3} \frac{1}{2x+3}\, dx$$

$$\int \frac{1}{2x+3}\, dx = \frac{1}{2}\lg|2x+3| + c$$ dove c è una costante qualunque

$$\int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{1}{2x+3}\, dx = \frac{1}{2}\lg|2x+3| + k$$ dove k è una opportuna costante da determinare

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2x+3}\, dx = \frac{1}{2}\lg 4 + k$$

$$k = -\frac{1}{2}\lg 4$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{1}{2x+3}\, dx = \frac{1}{2}\lg(2x+3) - \frac{1}{2}\lg 4$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{3} \frac{1}{2x+3}\, dx = \frac{1}{2}\lg 9 - \frac{1}{2}\lg 4 = \cancel{\frac{1}{2}} = \lg 9^{\frac{1}{2}} - \lg 4^{\frac{1}{2}} = \lg 3 - \lg 2 = \lg\frac{3}{2}$$

69 Es n: 256 pag 832

$$\int_{-1}^{2} \left(-\frac{1}{3}x^2 + x + \frac{1}{2}\right) dx$$

$$\int \left(-\frac{1}{3}x^2 + x + \frac{1}{2}\right) dx = -\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + c$$ dove c è una costante qualunque

$$\int_{-1}^{x} \left(-\frac{1}{3}x^2 + x + \frac{1}{2}\right) dx = -\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + k$$ dove k è una opportuna costante da determinare

$$\int_{-1}^{-1} \left(-\frac{1}{3}x^2 + x + \frac{1}{2}\right) dx = +\frac{1}{9} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} + k$$

$$k = -\frac{1}{9}$$

$$\int_{-1}^{x} \left(-\frac{1}{3}x^2 + x + \frac{1}{2}\right) dx = -\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{9}$$

$$\int_{-1}^{2} \left(-\frac{1}{3}x^2 + x + \frac{1}{2}\right) dx = -\frac{8}{9} + 2 + \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{9}} = 2$$

Es n: 257 pag 832

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (5 \operatorname{sen} x + 4 \cos x)\, dx$$

$$\int (5 \operatorname{sen} x + 4 \cos x)\, dx = -5 \cos x + 4 \operatorname{sen} x + c$$ dove c è una costante qualunque

$$\int_{0}^{x} (5 \operatorname{sen} x + 4 \cos x)\, dx = -5 \cos x + 4 \operatorname{sen} x + k$$ dove k è una opportuna costante da determinare

$$\int_{0}^{0} (5 \operatorname{sen} x + 4 \cos x)\, dx = -5 + k$$

$$k = 5$$

$$\int_{0}^{x} (5 \operatorname{sen} x + 4 \cos x)\, dx = -5 \cos x + 4 \operatorname{sen} x + 5$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (5 \operatorname{sen} x + 4 \cos x)\, dx = 4 + 5 = 9$$

Es n: 258 pag 832

$$\int_{1}^{4} \frac{1+x}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$\int \frac{1+x}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx + \int \frac{x}{\sqrt{x}}\, dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx + \int x^{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = 2\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c.$$

$$\int_{1}^{4} \frac{1+x}{\sqrt{x}}\, dx = \left[2\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c\right]_{1}^{4} = 4 + \frac{16}{3} + \cancel{c} - 2 - \frac{2}{3} - \cancel{c} = 2 + \frac{14}{3} = \frac{20}{3}$$

Es n: 259 pag 232

$$\int_{-2}^{1} \left(x^3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right) dx$$

$$\int \left(x^3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + c$$ dove c è una costante qualunque

$$\int_{-2}^{x} \left(x^3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + k$$ dove k è una opportuna costante da determinare

$$\int_{-2}^{-2} \left(x^3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right) dx = 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + k$$

$$0 = \frac{32+4+1}{8} + k \Rightarrow k = -\frac{37}{8}$$

$$\int_{-2}^{x} \left(x^3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{37}{8}$$

$$\int_{-2}^{1} \left(x^3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right) dx = \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{37}{8} = \frac{2-8+4-37}{8} = -\frac{39}{8}$$

Es n: 260 pag 232

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x \, dx$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cos x + \frac{1}{2}x + c$$ dove c è una costante qualunque

$$\int_{0}^{x} \operatorname{sen}^2 x \, dx = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cos x + \frac{1}{2}x + k$$ dove k è una opportuna costante da determinare

$$\int_{0}^{0} \operatorname{sen}^2 x \, dx = k$$

$$k = 0$$

$$\int_{0}^{x} \operatorname{sen}^2 x \, dx = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cos x + \frac{1}{2}x$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{\pi}{4}$$

Es n: 261 pag 233

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x) \, dx$$

$$\int (\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x) \, dx = -\cos x - \lg \cos x + c$$ dove c è una costante qualunque

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} (\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x) \, dx = -\cos x - \lg \cos x + k$$ dove k è una opportuna costante da determinare

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x) \, dx = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \lg \frac{1}{2}\sqrt{2} + k$$

$$k = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \lg \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} (\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x) \, dx = -\cos x - \lg \cos x + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \lg \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x) \, dx = -\frac{1}{2} - \lg\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \lg \frac{1}{2}\sqrt{2} = \lg \frac{1}{2}\sqrt{2} - \lg\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \cancel{\lg\frac{1}{2}} + \lg\sqrt{2} - \cancel{\lg\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} =$$

$$\frac{1}{2}\lg 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2} - 1 + \lg 2}{2}$$

FO Esercizio 263 pag 853

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$\int \left(\sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\cos x + \operatorname{tg} x + c$$ dove c è una costante qualunque

$$\int_0^{x} \left(\sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\cos x + \operatorname{tg} x + k$$ dove k è una costante ancora da determinare

$$\int_0^{0} \left(\sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -1 + k$$

$$0 = -1 + k \Rightarrow k = 1$$

$$\int_0^{x} \left(\sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\cos x + \operatorname{tg} x + 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\frac{1}{2} + \sqrt{3} + 1 = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$$

Problema

Sia data la funzione:

$$y = \frac{x^3 + px + q}{-x^2 + x + 2}$$

1) determinare p e q in modo che il resto della divisione del numeratore per il denominatore sia 4 e costruire in questo caso il grafico della funzione.
2) Calcolare i punti di intersezione A; B di tale curva con la retta $y = -x + K$. Discussione.
3) Scrivere l'equazione del luogo geometrico del punto M medio di AB al variare di K.
4) Calcolare l'area della regione limitata dalla curva e dai due assi cartesiani.

[1): $p = -3$; $q = 2$; asintoti: $x = -1$ e $x = 2$ e $y = -x - 1$.
minimo $(1, 0)$; massimo in un punto vicino a $(3; -5)$.
2) reali per $K \leq -1$ et $K \geq \frac{7}{9}$
3) $x = \frac{1}{2}$
4) $S = \frac{8}{3} \lg 2 - \frac{3}{2}$]

(1)

$$\begin{array}{l|l} x^3 + px + q & -x^2 + x + 2 \\ \hline -x^3 + x^2 + 2x & -x - 1 \\ x^2 + (p+2)x + q & \\ -x^2 + x + 2 & \\ \hline (p+3)x + q + 2 & \end{array}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$(p+3)x + q + 2 = 4$$

$$\begin{cases} p + 3 = 0 \Rightarrow p = -3 \\ q + 2 = 4 \Rightarrow q = 2 \end{cases}$$

$$y = \frac{x^3 - 3x + 2}{-x^2 + x + 2}$$ funzione razionale fratta di terzo grado fratto uno reale di secondo grado [Teorema: quando un numero annulla il N ... il Den. si è una ... l'asintoto obliquo]

$$-x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{+1 \pm 3}{2} \left\langle \begin{array}{l} -1 \\ 2 \end{array} \right.$$

D $(-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{-x^2 + x + 2} = \frac{x - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{-1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 3x + 2}{-x^2 + x + 2} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^3-3x+2}{-x^2+x+2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3-3x+2}{-x^2+x+2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-3x+2}{-x^2+x+2} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

La funzione ha due asintoti paralleli all'asse y, di equazione $x=-1$ et $x=2$ e un asintoto obliquo; la cui equazione sarà del tipo $y=mx+n$

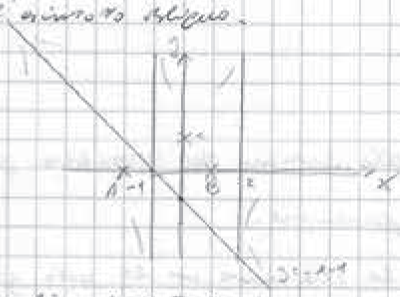
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x+2}{-x^3+x^2+2x} = \frac{+1}{-1} = -1$$

$m=-1$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3-3x+2}{-x^2+x+2}+x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3-3x+2-x^3+x^2+2x}{-x^2+x+2}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+2}{-x^2+x+2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$n=-1$

$y=-x-1$ eq dell'asintoto obliquo.



Punti d'incontro con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} y=\frac{x^3-3x+2}{-x^2+x+2} \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\frac{x^3-3x+2}{-x^2+x+2} \\ x=0 \\ y=1 \end{cases} \qquad C(0,1)$$

$x^3-3x+2=0$

$f(1)=0$

$(x-1)(x^2+x-2)=0$

$x^2+x-2=0$

$$x=\frac{-1\pm 3}{2} \left\langle \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

$A(-2,0)$ $B(1,0)$ 4 volte

Segno della funzione:

$$\frac{x^3-3x+2}{-x^2+x+2}>0$$

$x^3-3x+2>0$

$x^3-3x+2=0$

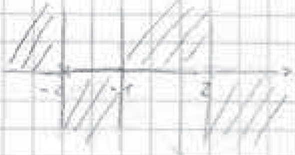
$(x-1)^2(x+2)>0$ per $x>-2$

$-x^2+x+2>0$

$x_1=-1$ et $x_2=2$

$-x^2+x+2>0$ per $-1<x<2$

$\frac{N}{D}>0$ per $x<-2$ et $-1<x<2$



AGOSTINI LUCA V°A

1

Sia data la funzione

$$y = \frac{x^3+px+q}{-x^2+x+2}$$

1) Determinare p e q in modo che il resto della divisione del numeratore per il denominatore sia 4 e costruire in questo caso il grafico della funzione.

2) Calcolare i punti d'intersezione A e B di tale curva con la retta $y=-x+k$. Discussione

3) Scrivere l'equazione del luogo geometrico del punto M medio di AB al variare di K.

4) Calcolare l'area della superficie limitata dalla curva e dai suoi assi cartesiani.

1)

$$\begin{array}{l|l} x^3+px+q & -x^2+x+2 \\ \hline -x^3+x^2+2x & -x-1 \\ x^2+(p+2)x+q & \\ -x^2+x+2 & \\ \hline (p+3)x+q+2 & \end{array}$$

Per il principio di identità si ha:

$(p+3)x+q+2=4$

$$\begin{cases} p+3=0 \Rightarrow p=-3 \\ q+2=4 \Rightarrow q=2 \end{cases}$$

$y = \dfrac{x^3-3x+2}{-x^2+x+2}$ funzione razionale fratta di terzo grado con lo studio del terzo ordine.

$-x^2+x+2=0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \dfrac{-1\pm 3}{-2} \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$

D $(-\infty;-1) \cup (-1;2) \cup (2;+\infty)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-3x+2}{-x^2+x+2} = \dfrac{x-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{-1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

La funzione ha due asintoti paralleli all'asse y, di equazione

$x=-1$ $\quad$ $x=2$

e un asintoto obliquo la cui equazione sarà del tipo $y=mx+n$.

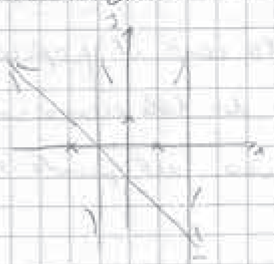
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-3x+2}{-x^3+x^2+2x} = \dfrac{1}{-1} = -1$

$m=-1$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3-3x+2}{-x^2+x+2}+x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+2}{-x^2+x+2}=\frac{1}{-1}=-1$$

$n=-1$

$y=-x-1$ eq. dell'asintoto obliquo.



Punti d'incontro con gli assi cartesiani

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^3-3x+2}{-x^2+x+2} \\ y=0 \end{cases}$$

$$\frac{x^3-3x+2}{-x^2+x+2}=0$$

$x^3-3x+2=0$

$f(1)=0$

$(x-1)(x^2+x-2)=0$

$x^2+x-2=0$

$x=\dfrac{-1\pm 3}{2} \lessgtr \begin{matrix}-2\\1\end{matrix}$

$A(-2,0)$; $B(1,0)$ tangente

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^3-3x+2}{-x^2+x+2} \\ x=0 \end{cases}$$

$y=1$

$C(0,1)$

Segno della funzione:

$$\frac{x^3-3x+2}{-x^2+x+2}>0$$

$x^3-3x+2>0$

$x^3-3x+2=0$

$(x-1)^2(x+2)=0$

$x=x_1=x_2=1$

$x_3=-2$

$x^3-3x+2>0$ per $x>-2$

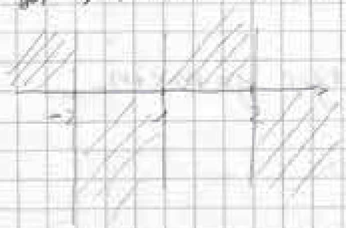
$-x^2+x+2>0$

$-x^2+x+2=0$

$x=\dfrac{-1\pm 3}{-2} \lessgtr \begin{matrix}-1\\2\end{matrix}$

$-x^2+x+2>0$ per $-1<x<2$

$\frac{N}{D}>0$ per $x<-2$ et $-1<x<2$



Studio dell'andamento della funzione:

$$y' = \frac{(3x^2-3)(-x^2+x+2)+(-x^3+3x-2)(-2x+1)}{(-x^2+x+2)^2} = \frac{-3x^4+3x^3+\cancel{6x^2}+3x^2-\cancel{3x}-6+2x^4-x^3-\cancel{6x^2}+\cancel{3x}+4x-2}{(-x^2+x+2)^2} =$$

$$= \frac{-x^4+2x^3+3x^2+4x-8}{(-x^2+x+2)^2} \geq 0$$

$$-x^4+2x^3+3x^2+4x-8=0$$

$$f(1) = -1+2+3+4-8 = 0 \Rightarrow x=1$$

$$(x-1)(-x^3+x^2+4x+8)=0$$

2)

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^3-3x+2}{-x^2+x+2} \\ y = -x+k \end{cases}$$

$$-x+k = \frac{x^3-3x+2}{-x^2+x+2}$$

$$\begin{cases} +\cancel{x^3}-x^2-2x-kx^2+kx+2k-\cancel{x^3}+3x-2=0 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq 2 \end{cases}$$

$$-(k+1)x^2+(k+1)x+2(k-1)=0$$

$$\Delta = (k+1)^2+8(k+1)(k-1) = k^2+2k+1+8k^2-8 = 9k^2+2k-7 \geq 0$$

$$9k^2+2k-7=0$$

$$k = \frac{-1\pm 8}{9} \begin{cases} -1 \\ \frac{7}{9} \end{cases}$$

$\Delta > 0$ per $k < -1$ et $k > \frac{7}{9}$

$\Delta = 0$ per $k = -1$ et $k = \frac{7}{9}$

$A = -k-1 \geq 0$ per $k \leq -1$
$B = k+1 \geq 0$ per $k \geq -1$
$C = 2(k-1) \geq 0$ per $k \geq 1$

$x \neq -1$ et $x \neq 2$

1° caso) $k < -1$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$

La retta ha due punti d'intersezione con la curva.

2° caso) $k = -1$ $\quad A=0, B=0 \Rightarrow -4=0$ impossibile.

La retta non ha punti in comune con la curva.

3° caso) $-1 < k < \frac{7}{3}$ $\quad \Delta < 0$ la retta non ha punti in comune con la curva. Le radici non sono reali.

4° caso) $k = \frac{7}{3}$ $\quad \Delta = 0 \Rightarrow \exists\, x_1 = x_2 = -\frac{B}{2A} = \frac{k+1}{2(k+1)} = \frac{1}{2}$

la retta è tangente alla curva nel punto $P\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{18}\right)$

5° caso) $\frac{7}{3} < k < 1$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$

La retta ha due punti d'intersezione con la curva.

6° caso) $k = 1$ $\quad C = 0 \Rightarrow -(k+1)x^2 + (k+1)x = 0$

$$-2x^2 + 2x = 0$$

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 1$$

La curva ha due punti d'intersezione con la curva. $A(0, 1)$ e $B(1, 0)$

7° caso) $k > 1$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$

La retta ha due punti d'intersezione con la curva.

3) Trovo le coordinate del punto medio M del segmento AB:

$$A\left(\frac{k+1-\sqrt{3k^2+2k-7}}{2(k+1)} ; -\frac{k+1-\sqrt{3k^2+2k-7}}{2(k+1)} + k\right)$$

$$B\left(\frac{k+1+\sqrt{3k^2+2k-7}}{2(k+1)} ; -\frac{k+1+\sqrt{3k^2+2k-7}}{2(k+1)} + k\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{k+1-\sqrt{3k^2+2k-7}}{2(k+1)} + \frac{k+1+\sqrt{3k^2+2k-7}}{2(k+1)}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(k+1)}{2(k+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}}$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{-k-1+\sqrt{3k^2+2k-7}}{2(k+1)} + \frac{-k-1-\sqrt{3k^2+2k-7}}{2(k+1)} + 2k\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{-2(k+1)}{2(k+1)} + 2k\right] = k - \frac{1}{2}$$

$$M\left(\frac{1}{2}; k - \frac{1}{2}\right)$$

4)
$$\int_0^1 \frac{x^3 - 3x + 2}{-x^2 + x + 2}\, dx$$

$$\int \frac{x^3 - 3x + 2}{-x^2 + x + 2}\, dx$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 \quad -3x+2 & -x^2+x+2 \\ \hline -x^3+x^2+2x & -x-1 \\ x^2 - x + 2 & \\ -x^2 \quad x \quad 2 & \\ \hline \quad 4 & \end{array}$$

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{-x^2 + x + 2} = -x - 1 + \frac{4}{-x^2 + x + 2}$$

$$\int \frac{x^3 - 3x + 2}{-x^2 + x + 2}\, dx = -\int (x+1)\, dx + \int \frac{4}{-x^2 + x + 2}\, dx$$

Consideriamo:

$$\int \frac{4}{-x^2+x+2}\,dx$$

$$\frac{4}{-x^2+x+2} = \frac{4}{(-x-1)(x-2)}$$

$$\frac{4}{-x^2+x+2} = \frac{A}{-x-1} + \frac{B}{x-2}$$

$$\frac{A}{-x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax-2A-Bx-B}{(-x-1)(x-2)} = \frac{(A-B)x-2A-B}{(-x-1)(x-2)}$$

per il principio di identità si ha che:

$$\begin{cases} A-B=0 \Rightarrow A=B \\ -2A-B=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B=-\frac{4}{3} \\ A=-\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\int \frac{4}{-x^2+x+2}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{4}{3}\int \frac{1}{x-2}\,dx = \frac{4}{3}\lg|x+1| - \frac{4}{3}\lg|x-2| + c$$

$$\int \frac{x^3-3x+2}{-x^2+x+2}\,dx = -\int (x+1)\,dx + \int \frac{4}{-x^2+x+2}\,dx = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{4}{3}\lg|x+1| - \frac{4}{3}\lg|x-2| + c$$

$$\int_0^1 \frac{x^3-3x+2}{-x^2+x+2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{4}{3}\lg|x+1| - \frac{4}{3}\lg|x-2| + c\right]_0^1 = -2 + \frac{4}{3}\lg 2 - \frac{4}{3}\lg 1 + \cancel{c} + \frac{1}{2} - \frac{4}{3}\lg 1 + \frac{4}{3}\lg 2 - \cancel{c} =$$

$$= -2 + \frac{1}{2} + \frac{8}{3}\lg 2 = \frac{8}{3}\lg 2 - \frac{3}{2}.$$

7) Studio dell'andamento della funzione:

$$y' = \frac{(3x^2-3)(-x^2+x+2)+(-x^3+3x-2)(-2x+1)}{(-x^2+x+2)^2} = \frac{-3x^4+3x^3+\cancel{6x^2}+3x^2-\cancel{3x}-6+2x^4-x^3-\cancel{6x}+3x+4x-2}{(-x^2+x+2)^2}$$

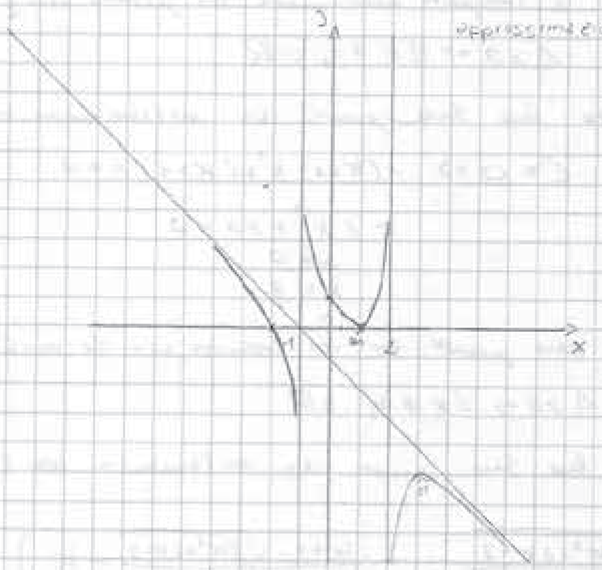
$$y' = \frac{-x^4+2x^3+3x^2+4x-8}{(-x^2+x+2)^2} \geq 0$$

$$-x^4+2x^3+3x^2+4x-8=0$$

$$f(1) = -1+2+3+4-8 = 0 \Rightarrow x = \underline{1}$$

$$(x-1)(-x^3+x^2+4x+8)$$

approssimazione del grafico:



(2)

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^3-3x+2}{-x^2+x+2} \\ y = -x+k \end{cases}$$

$$-x+k = \frac{x^3-3x+2}{-x^2+x+2}$$

$$\begin{cases} (-x+k)(-x^2+x+2) = x^3-3x+2 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq 2 \end{cases}$$

$$\cancel{x^3}-x^2-2x-kx^2+kx+2k-\cancel{x^3}+3x-2=0$$

$$-(k+1)x^2+(k+1)x+2(k-1)=0$$

$$\Delta = (k+1)^2+8(k+1)(k-1) = k^2+2k+1+8k^2-8 = 9k^2+2k-7 \geq 0.$$

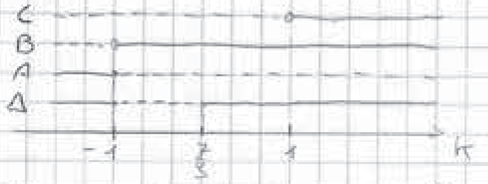
$$k = \frac{-1 \pm \sqrt{1+63}}{9} = \frac{-1 \pm 8}{9} \begin{cases} -1 \\ \frac{7}{9} \end{cases}$$

$\Delta > 0$ per $k < -1$ et $k > \frac{7}{9}$

$\Delta = 0$ per $k = 1$ et $k = \frac{7}{9}$

$A = -k-1 \geq 0$ per $k \leq -1$
$B = k+1 \geq 0$ per $k \geq -1$
$C = 2(k-1) \geq 0$ per $k \geq 1$

$x \neq -1$ e $x \neq 2$



1° caso) $k < -1$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$

La retta ha due punti di intersezione con la curva

2° caso) $k = -1$ $\quad \Delta = 0 \Rightarrow \exists\, x_1 = x_2 = -\dfrac{B}{2A} = \dfrac{k+1}{2(k+1)} = \dfrac{1}{2}$ tangente perché l'eq della retta è $y = -x-1$, che è l'asintoto obliquo

3° caso) $-1 < k < \frac{7}{5}$ $\quad \Delta < 0$ la retta non ha alcun punto in comune con la curva perché le radici non sono reali.

4° caso) $k = \frac{7}{5}$ $\quad \Delta = 0 \Rightarrow \exists\, x_1 = x_2 = -\dfrac{B}{2A} = \dfrac{k+1}{2(k+1)} = \dfrac{\frac{16}{5}}{\frac{32}{5}} = \dfrac{16}{5} \cdot \dfrac{5}{32} = \dfrac{1}{2}$

La retta è tangente alla curva nel punto $A\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{18}\right)$

5° caso) $\frac{7}{5} < k < 1$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$

la retta ha due punti di intersezione con la curva.

6° caso) $k = 1$ $\quad C = 0 \Rightarrow -(k+1)x^2 + (k+1)x = 0$

$$-2x^2 + 2x = 0$$
$$x = 0$$
$$x = 1$$

La curva ha due punti di intersezione con la curva: $A(0,1)$; $B(1,0)$

7° caso) $k > 1$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$

la ~~curva~~ retta ha due punti di intersezione con la curva.

3) $A\left(\dfrac{k+1-\sqrt{9k^2+2k-7}}{2(k+1)}; -\dfrac{k+1-\sqrt{9k^2+2k-7}}{2(k+1)} + k\right)$

$B\left(\dfrac{k+1+\sqrt{9k^2+2k-7}}{2(k+1)}; -\dfrac{k+1+\sqrt{9k^2+2k-7}}{2(k+1)} + k\right)$

Ascisse di A e B calcolando la x dalla equazione parametrica. L'ordinata dopo aver sostituito la x in $y = -x+k$.

Trovo l'ascissa del punto medio del segmento AB:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{k+1-\sqrt{9k^2+2k-7}}{2(k+1)} + \frac{k+1+\sqrt{9k^2+2k-7}}{2(k+1)}\right) = \frac{2(k+1)}{2(k+1)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$x = \frac{1}{2}$ [$x = \frac{1}{2}$ è anche l'equazione dell'asse di simmetria della parabola $= -\frac{B}{2A}$]

$$y = \left(\frac{-k-1+\sqrt{9k^2+2k-7}}{2(k+1)} + \frac{-k-1-\sqrt{9k^2+2k-7}}{2(k+1)} + 2k\right)\frac{1}{2} = \left(\frac{-2(k+1)}{2(k+1)} + 2k\right)\frac{1}{2} = k - \frac{1}{2}$$

$M\left(\frac{1}{2}; k-\frac{1}{2}\right)$

$x = \frac{1}{2}$

4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-3x+2}{-x^2+x+2}\,dx$ [mediante calcolo si ha che l'integrale è: $\approx 0,348332482$.

Per questo quesito vedi pag 746

Es n: 84 pag 843

Calcolare il valore medio della funzione:

$$y = \frac{1-x^4+x}{1+x^2}$$

per $0 \le x \le 1$

$$\int_0^1 \frac{1-x^4+x}{1+x^2}\,dx = \int_{0}^{*} \frac{(1-x^2)\cancel{(1+x^2)}}{\cancel{1+x^2}}\,dx + \int_{0}^{*} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int (1-x^2)\,dx + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\lg(x^2+1) + c$$

$$\int_0^x f(x)\,dx = -\frac{1}{3}x^3 + x + \overset{*}{\frac{1}{2}}\lg(x^2+1) + k \; ; \int_0^0 f(x)\,dx = k \Rightarrow k = 0$$

$$\int_0^x \frac{1-x^4+x}{1+x^2}\,dx = -\frac{1}{3}x^3 + x + \frac{1}{2}\lg(x^2+1) \; ; \int_0^1 \frac{1-x^4+x}{1+x^2} = -\frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2}\lg 2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\lg 2$$

$$M = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\lg 2}{1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\lg 2$$

*NB: $\lg_e 1 = 0$

Es n: 85 pag 843

Calcolare il valore medio della funzione:

$$y = x \sin x$$

per $0 \le x \le \pi$

$$\int_0^{*} x \sin x \,dx$$

$$\int x \sin x \,dx = -x\cos x + \sin x + c$$ con c costante qualunque

$$\int_0^x x \sin x\,dx = -x\cos x + \sin x + k$$ con k opportuna costante da determinare

$$\int_0^0 x \sin x\,dx = k$$

$k = 0$

$$\int_0^x x\sin x\,dx = -x\cos x + \sin x$$

$$\int_0^\pi x \sin x\,dx = \pi$$

$$M = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

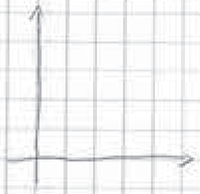
$$\int \frac{x+3}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{3}{x^2+1} = \frac{1}{2}\lg(x^2+1) + 3\,\mathrm{arctg}\, x + c$$

$y = \mathrm{arctg}\, x$ vd. pag 64

$x = \mathrm{tg}\, y$

$x' = \frac{1}{y'}$

Teorema di Torricelli o del calcolo fondamentale integrale



Se una funzione $f(x)$ è continua ~~...~~ in tutti i punti dove viene considerata allora ogni sua funzione integrale è una primitiva della $f(x)$ stessa

$$\int_e^x f(x)\,dx$$ [l'integrale è una funzione in x che è estremo d'integrale ...]

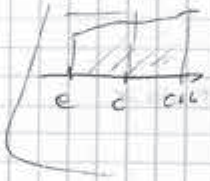
Si tratta di dimostrare che:

$$D\int_e^x f(x)\,dx = f(x)$$

purché $f(x)$ sia continua

$$\lim_{h\to 0}\left[\int_e^{c+h} f(x)\,dx - \int_e^{c} f(x)\,dx\right]\cdot\frac{1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_e^{c} f(x)\,dx + \int_c^{c+h} f(x)\,dx - \int_e^{c} f(x)\,dx\right] =$$



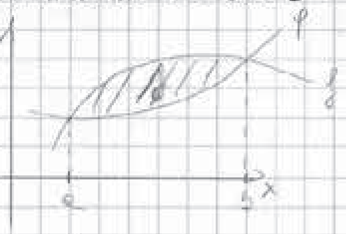
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\int_c^{c+h} f(x)\,dx$$

applico il teorema della media alle integrali $(b-a)=h$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot h\cdot f(c+\theta h) \qquad 0<\theta<1$$

$$= \lim_{h\to 0} f(c+\theta h) = f(c)$$ (in c qualunque ...)

13 Area delimitata da due curve:



$y = f(x)$

$y = \varphi(x)$

L'area delimitata da due curve è uguale all'integrale definito nell'intervallo a, b, in cui a e b sono le ascisse dei punti di intersezione delle curve, della differenza della curva che sta sopra e quella che sta sotto.

$$S = \int_a^b \left[f(x) - \varphi(x) \right] dx$$

Esercizio: calcolare l'area delimitata dalle curve:

$y = x^2 - 2x$

$y = x$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = x \end{cases}$$

$x_1 = 0 \quad (a)$

$x_2 = 3 \quad (b)$

$$S = \int_0^3 \left[x - (x^2 - 2x) \right] dx$$

$$S = \frac{9}{2} = 4{,}50$$

Esercizio: calcolare l'area della reg. $y = x^2$ per $2 < x < 3$

$$\int_2^3 x^2\,dx = ?$$

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c \quad \text{in caso più generale}$$

$$\int_2^x x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + k \quad \text{con k da determinare} \quad (1)$$

Siccome la (1) è una identità, in particolare è vera per $x = 2$

$$\int_2^x x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + k$$

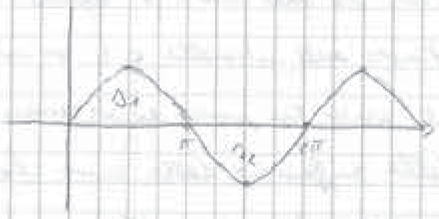
$$\int_2^2 x^2\,dx = \frac{8}{3} + k$$

$$0 = \frac{8}{3} + k \Rightarrow k = -\frac{8}{3} \quad \text{sostituiamo nella (1)}$$

$$\int_2^x x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{3}$$

$$\int_2^3 x^2\,dx = \frac{19}{3} \quad (\text{a x ho sostituito 3}).$$

L'area è $\frac{19}{3}$



$y = \operatorname{sen} x$

Si nota che:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx = 0.$$

Questo perché la S_1 è positiva e la S_2, pur avendo lo stesso modulo della S_1 è negativa per cui la somma è zero, mentre l'area effettiva è 2.
Dovremo quindi prima di calcolare un integrale definito di una funzione sapere com'è il grafico della funzione in modo tale da individuare eventuali aree negative.

Esercizio:

$$\int \frac{x-3}{(x-1)(x-4)} \, dx$$. caso in cui il grado della funzione al denominatore sia maggiore di quello al numeratore

$$* \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4} \right) dx = \int \frac{Ax - 4A + Bx - B}{(x-1)(x-4)} \, dx = \int \frac{(A+B)x - 4A - B}{(x-1)(x-4)} \, dx$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \Rightarrow B = 1 - A \\ -4A - B = -3 \end{cases}$$

$-4A - 1 + A = -3$

$-3A = -2 \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ B = \frac{1}{3} \end{cases}$

$$* \int \left(\frac{2}{3x-3} + \frac{1}{3x-12} \right) dx = \frac{2}{3} \int \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot (3x-3)} \, dx + \frac{1}{3} \int \frac{3}{3x-12} \, dx = \frac{2}{3} \int \frac{6}{6x-6} \, dx + \frac{1}{3} \int \frac{3}{3x-12} \, dx =$$

$$\frac{2}{3} \int \frac{1}{x-1} \, dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-4} \, dx = \frac{2}{3} \lg|x-1| + \frac{1}{3} \lg|x-4| + c$$

$$D\left(\frac{2}{3} \lg|x-1| + \frac{1}{3} \lg|x-4| + c \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-4} = \frac{2}{3x-3} + \frac{1}{3x-12} = \frac{6x-24+3x-3}{9(x-1)(x-4)} = \frac{9x-27}{9(x-1)(x-4)} =$$

$$\frac{9(x-3)}{9(x-1)(x-4)} = \frac{x-3}{(x-1)(x-4)}.$$

74 $\int \frac{x^3-3x+2}{-x^2+x+2}\,dx$. (Vedi pag 71 b) il grado della funzione al numeratore è maggiore del grado della funzione al denominatore.

$$x^3-3x+2 \;\big|\; \frac{-x^2+x+2}{-x-1}$$
$$4$$

$$\int\frac{x^3-3x+2}{-x^2+x+2}dx=\int\left(-x-1+\frac{4}{-x^2+x+2}\right)dx=-\int(x+1)dx+\int\frac{4}{-x^2+x+2}dx$$

consideriamo:

$$\int\frac{4}{-x^2+x+2}dx=\int\frac{4}{(x+1)(x-2)}dx\ ^*$$

$$^*\int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}\right)dx=\int\frac{Ax-2A+Bx+B}{-(x+1)(x-2)}dx=\int\frac{(A+B)x+B-2A}{(x+1)(x-2)}dx.$$

$$\begin{cases}A+B=0\Rightarrow A=-B\\ B-2A=4\end{cases}$$

$$B+2B=4\Rightarrow\begin{cases}B=\frac{4}{3}\\ A=-\frac{4}{3}\end{cases}$$

$$^*\frac{4}{3}\int\frac{3\cdot4}{4(3x+3)}dx-\frac{4}{3}\int\frac{3\cdot4}{4(3x-6)}dx=\frac{4}{3}\lg|12x+12|-\frac{4}{3}\lg|12x-24|+c.$$

In conclusione:

$$\int\frac{x^3-3x+2}{-x^2+x+2}dx=-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{4}{3}\lg|12x+12|-\frac{4}{3}\lg|12x-24|+c.$$

$$D\left[-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{4}{3}\lg|12x+12|-\frac{4}{3}\lg|12x-24|+c\right]=-x-1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{12x+12}\cdot\cancel{12}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{12x-24}\cdot\cancel{12}=$$

$$-x-1+\frac{4}{3x+3}-\frac{4}{3x-6}=-x-1+\frac{4}{3(x+1)}-\frac{4}{3(x-2)}=\frac{(9x^2-9x-18)(-x-1)+12x-24-12x-12}{9(x+1)(x-2)}=$$

$$\frac{-9x^3-\cancel{9x^2}+\cancel{9x^2}+9x+18x+18-36}{9(x+1)(x-2)}=\frac{-9x^3+27x-18}{9(x+1)(x-2)}=\frac{-\cancel{9}(x^3-3x+2)}{\cancel{9}(x+1)(x-2)}=$$

$$\frac{x^3-3x+2}{-(x+1)(x-2)}=\frac{x^3-3x+2}{-x^2+x+2}.$$

<u>Dunque per il problema:</u>

$$\int_0^1 f(x)=\left[-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{4}{3}\lg|12x+12|-\frac{4}{3}\lg|12x-24|+c\right]_0^1=-2+\frac{4}{3}\lg24-\frac{4}{3}\lg12+c$$
$$\left[+\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\lg12+\frac{4}{3}\lg24-c\ =\right]$$

$$=-2+\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\lg24+\frac{4}{3}\lg24-\frac{4}{3}\lg12-\frac{4}{3}\lg12=-\frac{3}{2}+\frac{8}{3}\lg24-\frac{8}{3}\lg12=-\frac{3}{2}+\frac{8}{3}\lg2+\cancel{\frac{8}{3}\lg12}-\cancel{\frac{8}{3}\lg12}$$
$$=\frac{8}{3}\lg2-\frac{3}{2}.$$

$$\int \frac{x+5}{x^3-3x^2+2x}\,dx$$ questa regola vale nel caso che il D ammetta zeri reali e distinti o almeno coincidenti.

$$\frac{x+5}{x^3-3x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

$$\frac{x+5}{x^3-3x^2+2x} = \frac{Ax^2-3Ax+2A+Bx^2-2Bx+Cx^2-Cx}{x(x-1)(x-2)}$$

$$\frac{x+5}{x^3-3x^2+2x} = \frac{(A+B+C)x^2+(-3A-2B-C)x+2A}{x(x-1)(x-2)}$$

Per il principio di identità i Numeratori devono essere uguali, e i Denominatori devono essere uguali

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -3A-2B-C=1 \\ 2A=5 \Rightarrow A=\frac{5}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} B+C=-\frac{5}{2} \\ -2B-C=\frac{17}{2} \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} B=6 \\ C=\frac{7}{2} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} A=\frac{5}{2} \\ B=6 \\ C=\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$1 \quad \int \frac{x+5}{x^3-3x^2+2x}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{x}\,dx - 6\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{7}{2}\int \frac{1}{x-2}\,dx = \frac{5}{2}\lg|x| - 6\lg|x-1| + \frac{7}{2}|x-2| + c.$$

$$(1) \int_{-1}^{3} \frac{x+5}{x^3-3x^2+2x}\,dx = \left[\frac{5}{2}\lg|x| - 6\lg|x-1| + \frac{7}{2}\lg|x-2| + c\right]_{-1}^{3} = \frac{5}{2}\lg 3 - 6\lg 2 + \frac{7}{2}\lg 1 + c - \frac{5}{2}\lg 1 + 6\lg 2 - \frac{7}{2}\lg 3 \, c$$

Una delle condizioni di integrabilità è che la funzione integrabile sia finita per cui la (1) è assurda.

$y = \sin 2x$

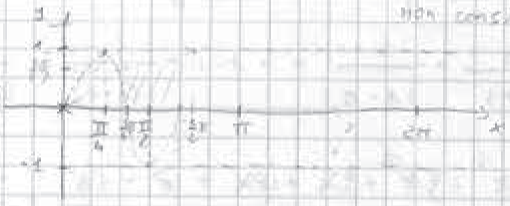
$0 < 2x < 2\pi$

$0 < x < \pi$

per $2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$2x = \pi \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$



non considerare le semplificazioni.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 3x - \sin x)\,dx$$

15

Esempio:

$$\frac{5x-1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3} = \frac{(x^3-3x^2+3x-1)A + Bx(x^2-2x+1) + Cx(x-1) + Dx}{x(x-1)^3} =$$

$$\frac{Ax^3-3Ax^2+3Ax-A+Bx^3-2Bx^2+Bx+Cx^2-Cx+Dx}{x(x-1)^3} = \frac{(A+B)x^3+(C-3A-2B)x^2+(3A+B-C+D)x-A}{x(x-1)^3}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -3A-2B+C=0 \\ 3A+B-C+D=5 \\ -A=-1 \end{cases}$$

~~il sistema non è risolvibile~~ eccetera.

$$C\int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx = C\int(x-1)^{-2}dx = C\,-\frac{1}{1}(x-1)^{-1}+k = -\frac{C}{x-1}+k.$$

Esempio:

$$\int\frac{x-3}{(x-1)(x-2)^2}\,dx$$

$$\frac{x-3}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2)^2+B(x-1)(x-2)+C(x-1)}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{Ax^2-4Ax+4A+Bx^2-3Bx+2B+Cx-C}{(x-1)(x-2)^2} =$$

$$\frac{(A+B)x^2+(-4A-3B+C)x+4A+2B-C}{(x-1)(x-2)^2}$$

per il principio di identità si ha che:

$$\begin{cases} A+B=0 \Rightarrow A=-B \\ -4A-3B+C=1 \\ 4A+2B-C=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4B-3B+C=1 \Rightarrow B=1-C \\ -4B+2B-C=-3 \end{cases}$$

$$-4+4C+2-2C-C=-3$$

$$\begin{cases} C=-1 \\ B=2 \\ A=-2 \end{cases}$$

$$\int\frac{x-3}{(x-1)(x-2)^2}\,dx = -2\int\frac{1}{x-1}\,dx+2\int\frac{1}{x-2}\,dx-\int\frac{1}{(x-2)^2}\,dx = -2\lg|x-1|+2\lg|x-2|+\frac{1}{x-2}+C.$$

Esercizio:

$$\int \frac{x+1}{x^3(x-1)}\,dx$$

$$\frac{x+1}{x^3(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1}$$

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1} = \frac{Ax^2(x-1) + Bx(x-1) + C(x-1) + Dx^3}{x^3(x-1)} = \frac{Ax^3 - Ax^2 + Bx^2 - Bx + Cx - C + Dx^3}{x^3(x-1)}.$$

$$\frac{(A+D)x^3 + (-A+B)x^2 + (-B+C)x - C}{x^3(x-1)}.$$

per il principio di identità si ha che:

$$\begin{cases} A+D=0 \\ -A+B=0 \\ -B+C=1 \\ -C=1 \Rightarrow \begin{cases} C=-1 \\ B=-2 \\ A=-2 \\ D=2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\int \frac{x+1}{x^3(x-1)}\,dx = -2\int \frac{1}{x}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^3}\,dx + 2\int \frac{1}{x-1}\,dx = -2\lg|x| + \frac{2}{x} + \frac{1}{2x} + 2\lg|x-1| + c$$

76 Es n°441 pag 863

Problema:

1) In un sistema di assi coordinati cartesiani si scrivano le equazioni delle due circonferenze passanti per l'origine O e aventi i centri rispettivamente, nei punti $C'(2,0)$ e $C''(-\frac{1}{2}, 0)$. Condotte per il punto O due rette mutuamente perpendicolari, delle quali la prima incontra le due circonferenze, oltre che nel punto O, nei punti A e B, rispettivamente e la seconda nei punti C e D, si determini il quadrilatero ACBD avente area massima.

2) Si studi la funzione:

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

e se ne disegni il grafico.

Si scrivano le equazioni delle due parabole, con gli assi paralleli all'asse delle ordinate, passanti per l'estremo relativo A della curva di ascissa $x=1$ e tali che l'area della regione di piano limitata dall'arco AB della curva e da ciascuna delle due parabole sia $\frac{7}{3}$.

3) In un triangolo di base $\overline{AB} = a$ ed altezza $\overline{CH} = h$, si inscriva il rettangolo, con un lato su AB e i vertici opposti sugli altri due lati, che in una rotazione completa attorno alla retta AB genera il solido di volume massimo. Supposto che gli angoli adiacenti alla base siano uno doppio dell'altro, si calcolino i valori che essi assumono quando detto valore massimo è $\frac{a^3}{36}\pi$. (Sessione unica, 1981)

1)

$A_{ACBD} = \frac{(AC+BC)h}{2} = \frac{5}{2}h$

C_1: $C'(2,0)$; $r=2$

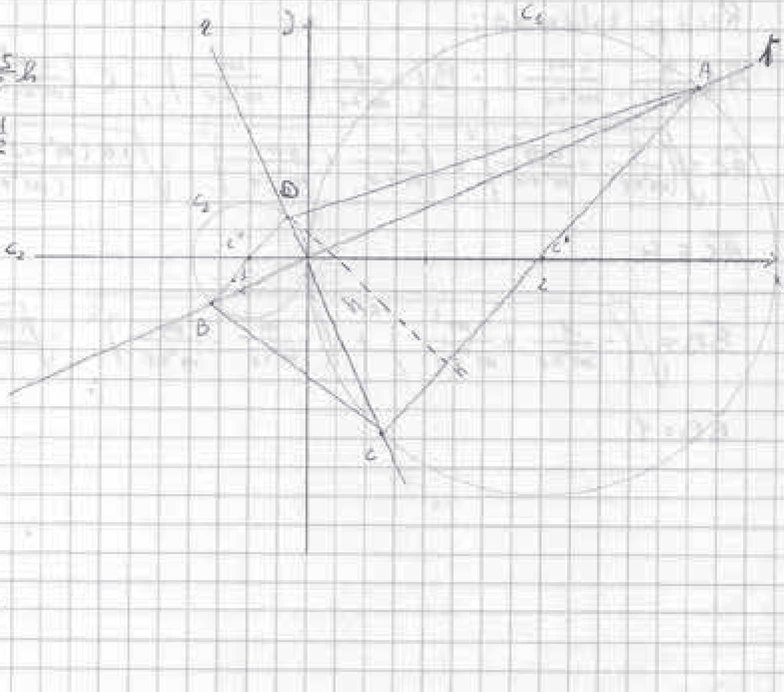
$(x-2)^2+y^2=4$

$x^2+y^2-4x=0$ equazione circonferenza C_1

C_2: $C''(-\frac{1}{2},0)$; $r=\frac{1}{2}$

$(x+\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$

$x^2+y^2+x=0$ equazione circonferenza C_2



s: $y=-\frac{1}{m}x$; r: $y=mx$

Trovo il punto d'incontro fra s e C_1:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x=0 \\ y=-\frac{1}{m}x \end{cases}$$

$x^2+\frac{1}{m^2}x^2-4x=0$

$(1+\frac{1}{m^2})x^2-4x=0$

$x=0$

$x=\frac{4m^2}{m^2+1}$

$C\left(\frac{4m^2}{m^2+1}; -\frac{4m}{m^2+1}\right)$

Trovo il punto d'incontro fra t e C_2

$$\begin{cases} x^2+y^2+x=0 \\ y=-\frac{1}{m}x \end{cases}$$

$$x^2+\frac{1}{m^2}x^2+x=0$$

$$\left(1+\frac{1}{m^2}\right)x^2+x=0$$

$$x=0$$
$$x=-\frac{m^2}{m^2+1}$$

$$D\left(-\frac{m^2}{m^2+1}; \frac{m}{m^2+1}\right)$$

Trovo il punto d'incontro fra r e C_1:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x=0 \\ y=mx \end{cases}$$

$$x^2+m^2x^2-4x=0$$

$$(m^2+1)x^2-4x=0$$

$$x=0$$
$$x=\frac{4}{m^2+1}$$

$$A\left(\frac{4}{m^2+1}; \frac{4m}{m^2+1}\right)$$

Trovo il punto d'incontro fra r e C_2:

$$\begin{cases} x^2+y^2+x=0 \\ y=mx \end{cases}$$

$$x^2+m^2x^2+x=0$$

$$(m^2+1)x^2+x=0$$

$$x=0$$
$$x=-\frac{1}{m^2+1}$$

$$B\left(-\frac{1}{m^2+1}; -\frac{m}{m^2+1}\right).$$

Ricapitolando:

$$A\left(\frac{4}{m^2+1}; \frac{4m}{m^2+1}\right); B\left(-\frac{1}{m^2+1}; -\frac{m}{m^2+1}\right); C\left(\frac{4m^2}{m^2+1}; -\frac{4m}{m^2+1}\right); D\left(-\frac{m^2}{m^2+1}; \frac{m}{m^2+1}\right)$$

$$\overline{AC}=\sqrt{\left(\frac{4}{m^2+1}-\frac{4m^2}{m^2+1}\right)^2+\left(\frac{4m}{m^2+1}+\frac{4m}{m^2+1}\right)^2}=\sqrt{\frac{16(m^2-1)^2+64m^2}{(m^2+1)^2}}=\sqrt{\frac{16\cancel{(m^2+1)^2}}{\cancel{(m^2+1)^2}}}=4$$

$$\overline{AC}=4$$

$$\overline{BD}=\sqrt{\left(-\frac{1}{m^2+1}+\frac{m^2}{m^2+1}\right)^2+\left(-\frac{m}{m^2+1}-\frac{m}{m^2+1}\right)^2}=\sqrt{\frac{(m^2-1)^2+4m^2}{(m^2+1)^2}}=\sqrt{\frac{\cancel{(m^2+1)^2}}{\cancel{(m^2+1)^2}}}=1$$

$$\overline{BD}=1$$

2) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ funzione razionale fratta di IV grado la curva sarà del II ordine.

$D\ (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

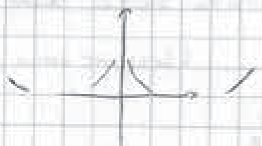
$\lim_{x \to -\infty} \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$

$\lim_{x \to 0} \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$

$\lim_{x \to \infty} \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$

La curva ha un asintoto parallelo all'asse y, ~~che equazione~~ che è l'asse y stesso e un asintoto obliquo:

$\lim_{x \to \infty} \left(x + \frac{1}{x^3}\right) = \infty$



La curva non ha punti di incontro con gli assi cartesiani.

Segno della funzione:

$f(x) > 0 \ \forall x \in D.$

Studio dell'andamento della funzione:

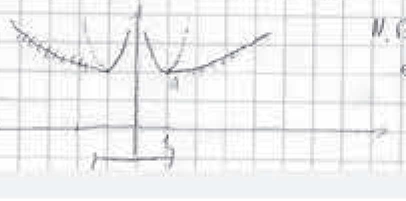
$y' = 2x - \frac{2x}{x^4}$

$2x - \frac{2x}{x^4} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$y'' = 2 \frac{-2x^3 \cdot 4x^3}{x^8} = 2 + \frac{6x^3}{x^8}$

$y''_{x=-1} = +8$ la funzione in $x = -1$ ha un minimo relativo.

$y''_{x=1} = 8$ la funzione ha un minimo relativo.



N.B.: la curva si asintotizza alla parabola di equazione $y = x^2$

Es n: 40 pag 968:

Problema:

1) Sui lati opposti AB e CD del rettangolo ABCD ed esternamente ad esso, si costruiscono due triangoli isosceli APB e CQD aventi gli angoli alla base di ampiezza α. Sapendo che il perimetro dell'esagono APBCQD è $2p$, si determinino le lunghezze dei lati del rettangolo in modo che l'area dell'esagono risulti massima. Per quale valore di α tale esagono è inscrivibile in una circonferenza?

2) Si rappresenti la funzione:

$$y = \frac{6x^2+2x+3}{2(2x^2+1)}$$

dopo aver determinato massimi, minimi, flessi e asintoti.

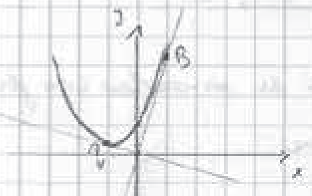
3) In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri la parabola di equazione

$$y = x^2+\sqrt{3}x+1$$

Condotte per l'origine O le due rette tangenti ad essa, si trovino l'equazione della circonferenza passante per O e per i due punti di contatto e si calcolino le aree delle due regioni finite di piano delimitate dalle due curve.

(Sessione ord. 1980)

3) $\begin{cases} y = x^2+\sqrt{3}x+1 \\ y = mx \end{cases}$ Trovo l'eq. della retta passante per O e tangente alla parabola



$x^2-(m-\sqrt{3})x+1=0$

$\Delta = (m-\sqrt{3})^2-4 = m^2-2m\sqrt{3}-1=0$

$m = \sqrt{3}\pm\sqrt{3+1} = \sqrt{3}\pm 2 \begin{cases}\sqrt{3}-2 \\ \sqrt{3}+2\end{cases}$

$y=(\sqrt{3}-2)x$ eq. della retta passante per O e tangente alla parabola. $y=(\sqrt{3}+2)x$ eq. della retta passante per O e tangente alla parabola.

Trovo il punto d'intersezione fra le rette e la parabola

$\begin{cases} y=(\sqrt{3}-2)x \\ y=x^2+\sqrt{3}x+1 \end{cases}$

$x^2+\sqrt{3}x+1 = \sqrt{3}x-2x$

$x^2+2x+1=0$

$A\begin{cases} x=-1 \\ y=2-\sqrt{3} \end{cases}$ punto di tangenza

$\begin{cases} y=(\sqrt{3}+2)x \\ y=x^2+\sqrt{3}x+1 \end{cases}$

$x^2+\cancel{\sqrt{3}x}+1 = \cancel{\sqrt{3}x}+2x$

$x^2-2x+1=0$

$B\begin{cases} x=1 \\ y=\sqrt{3}+2 \end{cases}$ punto di tangenza

Trovo l'equazione della circonferenza passante per O ($c=0$) e nei punti di tangenza:

$x^2+y^2+ax+by=0$

$\begin{cases} 1+7-4\sqrt{3}-a+2b-b\sqrt{3}=0 \\ 1+7+4\sqrt{3}+a+2b+b\sqrt{3}=0 \end{cases}$

$4b+16=0 \Rightarrow b=-4$

1) Sui lati opposti AB e CD del rettangolo ABCD ed esternamente ad esso, si costruiscano due triangoli isosceli APB e CQD, aventi gli angoli alla base di ampiezza α.
Sapendo che il perimetro dell'esagono APBCQD è $2p$, si determinino le lunghezze dei lati del rettangolo in modo che l'area dell'esagono risulti massima. Per quale valore di α tale esagono è inscrivibile in una circonferenza?

2) Si rappresenti la funzione:

$$y=\frac{6x^2+2x+3}{2(2x^2+1)},$$

dopo aver determinato massimi, minimi, flessi e asintoti.
Effettuata la sostituzione $x=t$, $y=s$, si interpreti la s come la distanza percorsa su di una retta da un punto al variare del tempo t, si dica per quali valori del tempo t positivo, la velocità è massima in modulo e si descriva il moto del punto.
Facoltativamente, si interpreti il significato della funzione per $t<0$.

3) In un sistema d'assi cartesiani si consideri la parabola di equazione:

$$y=x^2+\sqrt{3}\,x+1$$

Condotte per l'origine O le due rette tangenti ad essa, si scriva l'equazione della circonferenza passante per O e per i due punti di contatto e si calcolino le aree delle due regioni finite di piano delimitate dalle due curve.

4) Si enuncino le condizioni di derivabilità e di integrabilità delle funzioni e si dia qualche esempio di funzione integrabile ma non derivabile. (Sessione unica 1980).

2) $y=\frac{6x^2+2x+3}{4x^2+2}$ funzione razionale fratta di terzo grado: la curva sarà di terzo ordine.

$D\ (-\infty,+\infty)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

La funzione ha un asintoto parallelo all'asse x di equazione:

$$y=\frac{3}{2}$$

Punti d'incontro con gli assi cartesiani

$$\begin{cases} y=\frac{6x^2+2x+3}{4x^2+2} \\ y=0 \end{cases}$$

$6x^2+2x+3=0$

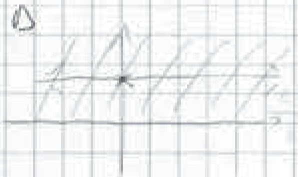
$\Delta = 1-18<0$

$$\begin{cases} y=\dfrac{6x^2+2x+3}{4x^2+2} \\ x=0 \end{cases}$$

$y=\frac{3}{2}$

Segno della funzione:

$\dfrac{6x^2+2x+4}{4x^2+2}>0 \quad \forall x\in D$



Studio dell'andamento della funzione:

$$y'=\frac{(12x+2)(4x^2+2)+(-6x^2-2x-3)\cdot 8x}{(4x^2+2)^2}=\frac{\cancel{48x^3}+\cancel{24x}+8x^2+4-\cancel{48x^3}-16x^2-\cancel{24x}}{(4x^2+2)^2}=$$

$\dfrac{-8x^2+4}{(4x^2+2)^2}\geq 0$

$-8x^2+4\geq 0$

$2x^2-1\leq 0$

$-\frac{1}{2}\sqrt{2}\leq x\leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$

per $x<-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ la funzione decresce

per $-\frac{1}{2}\sqrt{2}<x<\frac{1}{2}\sqrt{2}$ la funzione cresce

per $x>\frac{1}{2}\sqrt{2}$ la funzione decresce.

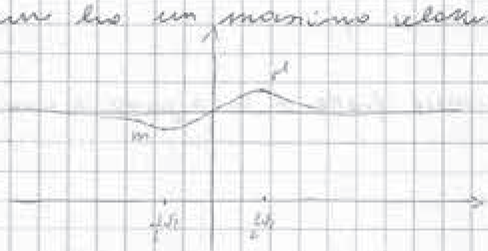
Quindi:

per $x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$f(-\frac{1}{2}\sqrt{2})=\dfrac{6-\sqrt{2}}{4}$

per $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f(\frac{1}{2}\sqrt{2})=\dfrac{6+\sqrt{2}}{4}$



3) $\begin{cases} y=x^2+\sqrt{3}\,x+1 \\ y=mx \end{cases}$

$x^2-(m-\sqrt{3})x+1=0$

$\Delta=(m-\sqrt{3})^2-4=m^2-2m\sqrt{3}-1=0$

$m=\sqrt{3}\pm\sqrt{3+1}=\sqrt{3}\pm 2 \begin{cases}\sqrt{3}-2\\ \sqrt{3}+2\end{cases}$

$y=(\sqrt{3}-2)x$ equazione della retta passante per l'origine e tangente alla parabola data.

$y=(\sqrt{3}+2)x$ equazione della retta passante per O e tangente alla parabola.

$$\begin{cases} y=(\sqrt{3}-2)x \\ y=x^2+\sqrt{3}x+1 \end{cases}$$

$$x^2+\cancel{\sqrt{3}x}+1=\cancel{\sqrt{3}x}-2x$$

$$x^2+2x+1=0$$

$$A\begin{cases} x=-1 \\ y=2-\sqrt{3} \end{cases}$$ punto di tangenza

$$\begin{cases} y=(\sqrt{3}+2)x \\ y=x^2+\sqrt{3}x+1 \end{cases}$$

$$x^2+\cancel{\sqrt{3}}x+1=\cancel{\sqrt{3}}x+2x$$

$$x^2-2x+1=0$$

$$B\begin{cases} x=1 \\ y=\sqrt{3}+2 \end{cases}$$ punto di tangenza.

Trovo l'eq. della circonf. passante per $O(0,0)$; $A(-1, 2-\sqrt{3})$ e $B(1, \sqrt{3}+2)$.

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

$$\begin{cases} 1+7-4\sqrt{3}-a+2b-b\sqrt{3}=0 \\ 1+7+4\sqrt{3}+a+2b+b\sqrt{3}=0 \end{cases}$$

$$4b+16=0 \Rightarrow b=-4$$

$$a=0$$

$$x^2+y^2-4y=0$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-4y=0 \\ y=x^2+\sqrt{3}x+1 \end{cases}$$

$$x^2+x^4+2x^3\sqrt{3}+5x^2+2x\sqrt{3}+1-4x^2-4x\sqrt{3}-4=0$$

$$x^4+2x^3\sqrt{3}+2x^2-2x\sqrt{3}-3=0$$

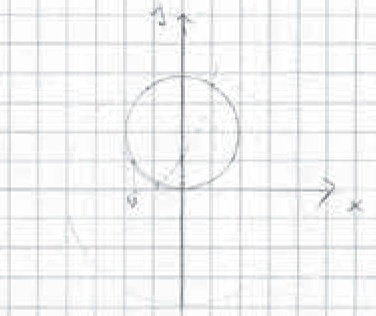
$$(x^2-1)(x^2+2x\sqrt{3}+3)=0$$

$$x=\pm 1$$

$$x^2+2x\sqrt{3}+3=0$$

$$x=-\sqrt{3}\pm\sqrt{3-3}=-\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=1 \end{cases}$$



$c = 0$

$x^2+y^2-4y=0$ [illegible] * vedi pg 78 b;

2) $y = \dfrac{6x^2+2x+3}{4x^2+2}$ [illegible]

$D(-\infty; +\infty)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{3}{2}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{3}{2}$

la funzione ha un asintoto parallelo all'asse x di equazione:

$$y = \frac{3}{2}$$

Incontro con gli assi cartesiani:

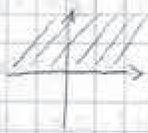
$\begin{cases} y = \dfrac{6x^2+2x+3}{4x^2+2} \\ y=0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} y = \dfrac{6x^2+2x+3}{4x^2+2} \\ x=0 \end{cases}$

$6x^2+2x+3=0$ $\qquad$ $y = \frac{3}{2}$

$\Delta = \cancel{1} - 18 < 0$

Segno della funzione:

$\dfrac{6x^2+2x+3}{4x^2+2} > 0 \quad \forall x \in D$



Studio dell'andamento della funzione:

$y' = \dfrac{(12x+2)(4x^2+2)+(-6x^2-2x-\boxed{4}^{3})(8x)}{(4x^2+2)^2} = \dfrac{4\cancel{8}x^3+24x+8x^2+4-48x^3-16x^2-\boxed{32}^{24}x}{(4x^2+2)^2} =$

$= \dfrac{-8x^2-8x+4}{(4x^2+2)^2} \geq 0$

$-8x^2-8x+4=0$

$2x^2+2x-1=0$

$x = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+2}}{2} \Leftarrow \dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \left\langle \begin{array}{l} \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow y' \geq 0 \Rightarrow -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} < x < \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

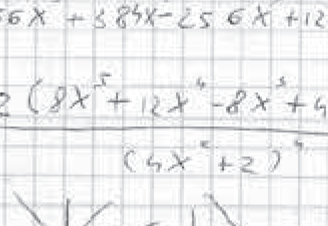
$y'' = \dfrac{(-16x-8)(16x^4+16x^2+4)+2(8x^2+8x-4)(4x^2+2)\cdot 8x}{(4x^2+2)^4} = [-256x^5-256x^3+64x-128x^4-128x^2+32+$

$+16x(32x^3+1\cancel{6}x^2+32x^3+16x-16\cancel{x}^2-8)] \cdot \dfrac{1}{(4x^2+2)^4} =$

$= (-256x^5-128x^4-256x^3-128x^2+32+512x^5+2\cancel{5}6x^3+512x^4+256x^2-25\cancel{6}x^3-128x) \cdot \dfrac{1}{(4x^2+2)^4} =$

$= (256x^5+384x^4-256x^3+128x^2-128x+32) \dfrac{1}{(4x^2+2)^4} =$

$= \dfrac{32(8x^5+12x^4-8x^3+4x^2-4x+1)}{(4x^2+2)^4}$



per $x < -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ la funzione decresce

per $-\frac{1+\sqrt{3}}{2} < x < \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ la funzione cresce

per $x > \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ la funzione decresce

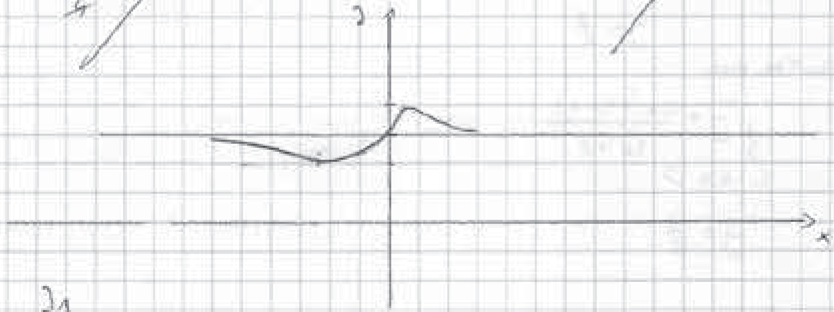
Quindi:

per $x = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

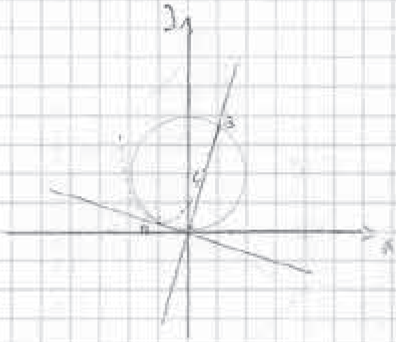
$$f\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3 \cdot \frac{2(2+\sqrt{3})}{4} - 1 - \sqrt{3} + 3}{4 \cdot \frac{4+2\sqrt{3}}{4} + 2} = \frac{6+3\sqrt{3}-1-\sqrt{3}+3}{4+2\sqrt{3}+2} = \frac{8+2\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}} = \frac{4+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

per $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$$f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = \frac{3 \cdot \frac{2(2-\sqrt{3})}{4} + \sqrt{3} - 1 + 3}{4 \cdot \frac{4-2\sqrt{3}}{4} + 2} = \frac{6-3\sqrt{3}+\sqrt{3}+2}{6-2\sqrt{3}} = \frac{8-2\sqrt{3}}{6-2\sqrt{3}} = \frac{4-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$



2)



$$\begin{cases} x^2+y^2-4y=0 & y = 2 \pm \sqrt{4-x^2} \\ y = x^2+\sqrt{3}\,x+1 \end{cases}$$

$x^2 + x^4 + 2x^3\sqrt{3} + 5x^2 + 2x\sqrt{3} + 1 - 4x^2 - 4\sqrt{3} - 4 = 0$

$x^4 + 2x^3\sqrt{3} + 2x^2 - 2x\sqrt{3} - 3 = 0$

$f(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$

$f(-1) = 0 \Rightarrow x_2 = -1$

$(x-1)(x+1)(x^2+2x\sqrt{3}+3) = 0$

$x = 1$
$x = -1$
$x^2 + 2x\sqrt{3} + 3 = 0$

$x = -\sqrt{3} \pm \sqrt{3-3} = -\sqrt{3}$

$y^2 - 4y + x^2 = 0$, eq. del tipo

~~che è possibile fare~~

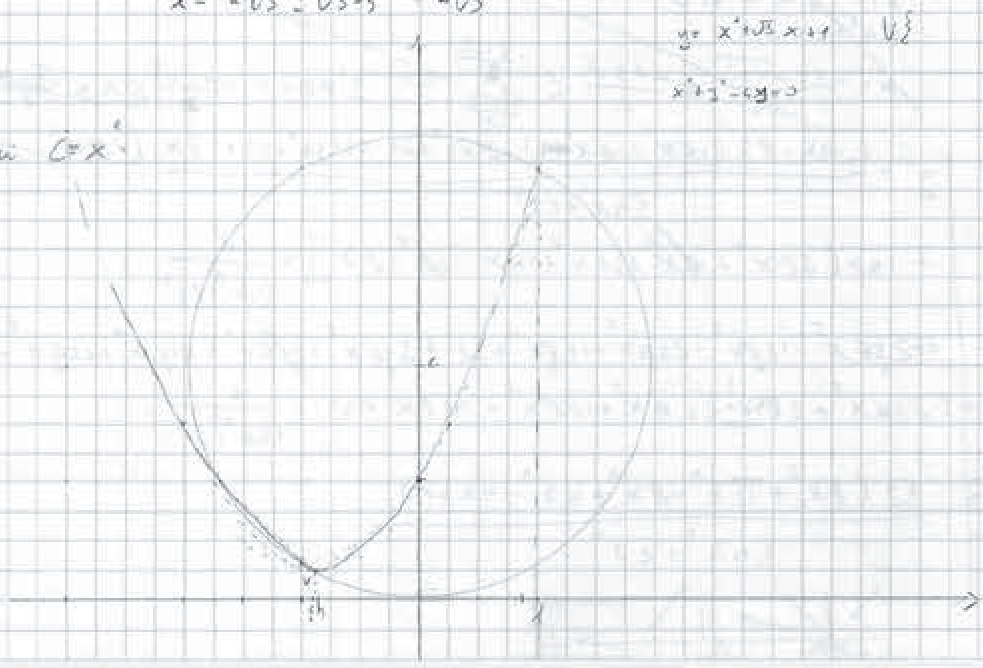
$ay^2 + by + c = 0$ in cui $c = x^2$

tenendo conto:

$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2} =$

$y = x^2+\sqrt{3}\,x+1$ ∨ {

$x^2+y^2-4y=0$



15

Esempio di funzione non integrabile:

Consideriamo nell'intervallo $[0, 1]$ la seguente funzione

$$f(x)\begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ è razionale} \\ 1 & \text{se } x \text{ è irrazionale} \end{cases}$$

Calcolo l'integrale definito della funzione in $[0, 1]$ attenendomi alla definizione di Riemann:

$m_1\ m_2\ m_n = 0$

$s = \delta_1 0 + \delta_2 0 + \dots + \delta_n 0 = 0$

la somma per difetto è zero.

L'estremo superiore $\{s\}$ è zero

$$\underline{\int} f(x)\,dx = 0 \quad \text{(int. def. per difetto)}$$

$M_1, M_2, \dots M_n = 1$

$S = \delta_1 \cdot 1 + \delta_2 \cdot 1 + \dots + \delta_n 1 = 1$

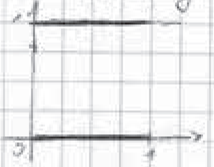
l'estremo inferiore $\{S\}$ è uno.

$$\overline{\int} f(x)\,dx = 1$$

L'integrale definito non esiste.

Grafico della funzione:

$y[0,1]$



L'insieme dei numeri razionali, come quello dei numeri irrazionali è denso, cioè nell'intervallo $[0, 1]$ vi sono infiniti numeri razionali e irrazionali per cui nel grafico non vi sono punti di discontinuità.

Es n: 4 pag 871

In un RCO si consideri il fascio di parabole di equazione:

(1) $$y = mx^2 + (1-4m)x + 1,$$

dove m è un parametro diverso da zero.

1) Si determinino le coordinate del vertice della generica parabola (1) in funzione di m.

Successivamente, eliminando m fra le relazioni trovate, si studi la curva f di equazione $y = f(x)$ che così si ottiene, determinando in particolare i punti A e B nei quali la funzione ha, rispettivamente, un massimo e un minimo relativo.

2) Dopo aver verificato che tutte le parabole passano per A e B, studiare quella che ha il vertice in B.

3) Dire per quali valori di h la retta di equazione:

$$y = h,$$

interseca la parabola di vertice B in due punti distinti M e N situati nel semipiano $y \geq 0$.

Determinare poi il valore di h per il quale risulta massimo il perimetro del rettangolo che ha per vertici i punti M e N e le loro proiezioni ortogonali sull'asse delle x.

1): $y = mx^2 + (1-4m)x + 1$.

$$V \begin{cases} x = \dfrac{4m-1}{2m} \Rightarrow m = -\dfrac{1}{2x-4} \\[2ex] y = \dfrac{-16m^2+12m-1}{4m} \end{cases}$$

$$y = -\frac{x^2}{2(x-2)} + \left(1 + \frac{2}{x-2}\right)x + 1$$

$$y = -\frac{x^2}{2(x-2)} + x + \frac{2x}{x-2} + 1$$

$$y = \frac{-x^2 + 2x^2 \cancel{-4x} \cancel{+4x} + 2x - 4}{2(x-2)}$$

$$y = \frac{2x + x^2 - 4}{2(x-2)}$$

$$y = \frac{x^2+2x-4}{2(x-2)}$$ comunque fuori dal D perché $x = 2$ zero del denominatore.

D $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+2x-4}{2(x-2)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+2-\frac{4}{x}}{2-\frac{4}{x}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

La funzione ha un asintoto parallelo all'asse y di equazione:

$$x = 2$$

e un asintoto obliquo, di equazione $y = mx+n$

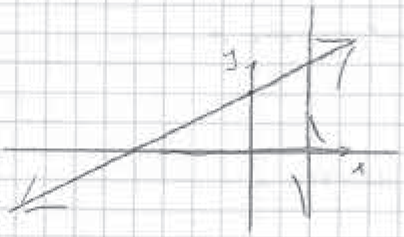
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-4}{2x^2-4x} = \frac{1}{2}$$

$m = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+2x-4}{2(x-2)} - \frac{x}{2}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+2x-4-x^2+2x}{2(x-2)}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{4x-4}{2x-4} = \frac{4}{2} = 2$$

$n = 2$

$y = \frac{1}{2}x + 2$



Punti d'incontro con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2+2x-4}{2(x-2)} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{x^2+2x-4}{2(x-2)} \\ x = 0 \end{cases}$$

$x^2+2x-4 = 0$ $\qquad$ $y = +1$

$Q(0;+1)$

$x = -1 \pm \sqrt{1+4} \; < \begin{matrix} -1-\sqrt{5} \\ -1+\sqrt{5} \end{matrix}$

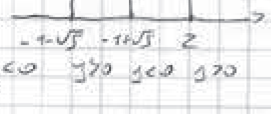
$P(-1-\sqrt{5}\,;0)$; $R(-1+\sqrt{5}\,;0)$.

Segno della funzione:

$$\frac{x^2+2x-4}{2(x-2)} > 0$$

$x^2+2x-4 > 0$ per $x < -1-\sqrt{5}$ et $x > -1+\sqrt{5}$

$2(x-2) > 0$ per $x > 2$



Studio dell'andamento della funzione:

$$y' = \frac{2(x+1)\cdot 2(x-2) + (-x^2-2x+4)\cdot 2}{4(x-2)^2} = \frac{4(x^2-x-2) - 2x^2 - 4x + 8}{4(x-2)^2} = \frac{4x^2-4x-8-2x^2-4x+8}{4(x-2)^2} =$$

$$\frac{2x^2-8x}{4(x-2)^2} \geq 0$$

$2x^2 - 8x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$ et $x \geq 4$

$y'>0$ 0 $y'<0$ 4 $y'>0$

per $x<0$ la funzione cresce

per $0<x<4$ la funzione decresce

per $x>4$ la funzione cresce.

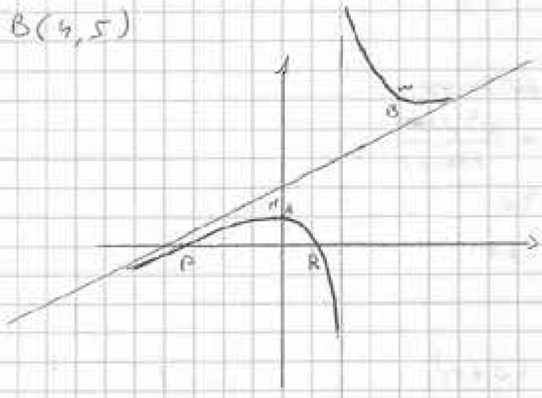
Dunque:

per $x=0$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f(0) = 1$ $\quad$ $A(0,1)$

per $x=4$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$f(4) = 5$ $\quad$ $B(4,5)$



2) $y = mx^2 + (1-4m)x + 1$ $\quad$ $A(0,1)$ $\quad$ $B(4,5)$

$f(0) = 1$.

$f(4) = 16m + 4 - 16m + 1 = 5$.

Trovo l'eq. della parabola con il vertice in $B(4,5)$

$$V\begin{cases} x = \dfrac{4m-1}{2m} \\ y = \dfrac{-16m^2+12m-1}{4m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{4m-1}{2m} = 4 \Rightarrow m = -\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{-16m^2+12m-1}{4m} = 5 \end{cases}$$

$-16m^2 + 12m - 1 = 20m$

$-1 - 3 - 1 = -5$

$-5 = -5.$

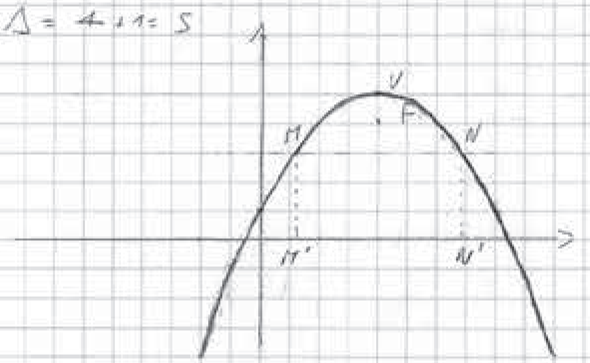
$m = -\frac{1}{4}$:

$y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1$

81

$$F\begin{cases} x = -\frac{b}{2a} = 4 \\ y = \frac{1-\Delta}{4a} = \frac{1-5}{-\frac{1}{8}} = 4 \end{cases}$$

$\Delta = 4 + 1 = 5$



3)

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1 \\ y = h \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$h = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1$

$4h = -x^2 + 8x + 4$

$x^2 - 8x + 4h - 4 = 0$

$\Delta = 16 - 4h + 4 = -4h + 20 \geq 0$

$-4h + 20 \geq 0$

$h < 5$ et $h \geq 0$

$0 \leq h < 5$

$x^2 - 8x + 4h - 4 = 0$

$x = 4 \pm \sqrt{16+4-4h} = 4 \pm \sqrt{20-4h}$ $\begin{cases} 4 - \sqrt{20-4h} \\ 4 + \sqrt{20-4h} \end{cases}$

$\overline{M'N'} = \overline{MN} = \left| 4 + \sqrt{20-4h} - 4 + \sqrt{20-4h} \right| = 2\sqrt{20-4h} = 4\sqrt{5-h}$

$\overline{MM'} = \overline{NN'} = h$

$p = 2h + 8\sqrt{5-h}$

$p = h + 4\sqrt{5-h}$

$p' = 1 - \frac{2}{\sqrt{5-h}} = 0$

$1 - \frac{2}{\sqrt{5-h}} = 0$

$\sqrt{5-h} = 2$

$5 - h = 4$

$h = \underline{1}$

$p'' = \frac{2 \cdot -\frac{1}{2\sqrt{5-h}}}{5-h} = -\frac{1}{\sqrt{5-h}} \cdot \frac{1}{5-h}$

$p''_{h=1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{8} < 0.$

Dunque per $h = 1$ si ha il perimetro massimo del rettangolo richiesto.

$\boxed{\text{Teorema del resto}}$:

$f(x) \quad : \quad \dfrac{x+a}{Q(x)}$ (R è un numero [illegible])

R

$f(x) = Q(x)\,(x+a) + R$

Tale identità, ciò vero anche per $x = -a$

$f(-a) = Q(-a)(-a+a) + R$

$f(-a) = R$

<u>Esempio</u>: Dato il polinomio

$3x^3-2x+5$, è divisibile per $x-1$. Se no determinare il resto.

$f(1) = 6$. Il polinomio non è divisibile per $x-1$ e ho resto 6.

$x^3-5x^2+4 \qquad\qquad x-1$

	1	-5	0	4
1		1	-4	-4
	1	-4	-4	0

$(x^2-4x-4)(x-1) = x^3-5x^2+4$

Quando il polinomio dato è:

x^3-5x^2+4 e si chiede di scomporlo si prova con Ruffini ad abbassarlo di grado, facendo la ricerca dei divisori del termine noto:

$f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(-4)$

Se a questo punto nessuna delle sostituzioni ha annullato il polinomio, allora tale polinomio non è scomponibile.

82 Esercizio pag 800 Studiare la seguente funzione.

$y = 4x^3 - 3x - 1$ funzione razionale intera di III grado, il grafico sarà una curva del III ordine.

$D(-\infty; +\infty)$

$\lim_{x \to -\infty} (4x^3 - 3x - 1) = \lim_{x \to -\infty} x^3\left(4 - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (4x^3 - 3x - 1) = \lim_{x \to +\infty} x^3\left(4 - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = +\infty$

Punti d'incontro con gli assi coordinati:

$\begin{cases} y = 4x^3 - 3x - 1 \\ y = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} y = 4x^3 - 3x - 1 \\ x = 0 \end{cases}$

$4x^3 - 3x - 1 = 0$ $\qquad$ $y = -1$

$f(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ $\qquad$ $C(0, -1)$

	4	0	-3	-1
1		4	4	1
	4	4	1	0

$(x-1)(4x^2 + 4x + 1) = 0$

$4x^2 + 4x + 1 = 0$

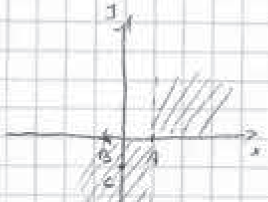
$(2x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$A(1, 0)$ $B(-\frac{1}{2}, 0)$ doppio

Segno della funzione:

$4x^3 - 3x - 1 > 0$

$(x-1)(2x+1)^2 > 0 \Rightarrow x > 1$



Studio dell'andamento della funzione

$y' = 12x^2 - 3$

$12x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

$y'' = 24x$

$y''_{x=\frac{1}{2}} = 12$ la funzione ha in $x = \frac{1}{2}$ un minimo relativo il cui valore è:

$f(\frac{1}{2}) = -2$

$y''_{x=-\frac{1}{2}} = -12$ la funzione ha in $x = -\frac{1}{2}$ un massimo relativo il cui valore è:

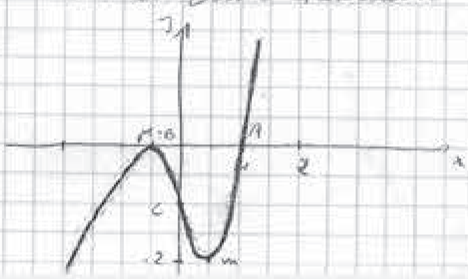
$f(-\frac{1}{2}) = 0$

$y'' > 0$ per $x > 0$.

La funzione per $x > 0$ ha la concavità positiva.

La funzione per $x < 0$ ha la concavità negativa.

La funzione per $x = 0$ ha un flesso ascendente.



Es n° 305 pag 802 Studiare la seg funzione:

$y = 2\sqrt{x+1} - x$

$x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

D $[-1; +\infty)$

$f(-1) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (2\sqrt{x+1} - x) = -\infty$

Punti d'incontro con gli assi coordinati:

$\begin{cases} y = 2\sqrt{x+1} - x \\ y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 2\sqrt{x+1} - x \\ x = 0 \end{cases}$

$y = 2$

$C(0, 2)$

$2\sqrt{x+1} - x = 0$

$2\sqrt{x+1} = x$

$4x + 4 = x^2$

$x^2 - 4x - 4 = 0$

$x = 2 \pm \sqrt{4+4} = 2 \pm 2\sqrt{2} \begin{cases} 2 - 2\sqrt{2} \\ 2 + 2\sqrt{2} \end{cases}$

$A(2 - 2\sqrt{2}; 0)$; $B(2 + 2\sqrt{2}; 0)$

Segno della funzione:

$\begin{cases} 2\sqrt{x+1} - x > 0 \\ x > 0 \quad \text{et} \quad x > -1 \text{ inutile} \\ 4x + 4 > x^2 \end{cases}$

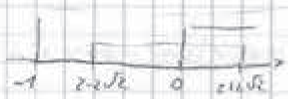
$x^2 - 4x - 4 < 0$

$x^2 - 4x - 4 = 0$

$x = \begin{cases} 2 - 2\sqrt{2} \\ 2 + 2\sqrt{2} \end{cases}$

$2 - 2\sqrt{2} < x < 2 + 2\sqrt{2}$

Il sistema è verificato:



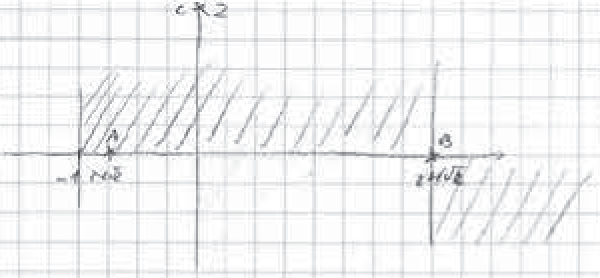
$0 < x < 2 + 2\sqrt{2}$

$\begin{cases} 2\sqrt{x+1} - x > 0 \\ x < 0 \\ x > -1 \end{cases}$

$-1 < x < 0$

La disequazione è verificata:

$-1 < x < 2 + 2\sqrt{2}$



Studio dell'andamento della funzione:

$y' = \frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1$

$\frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1 = 0$

$1 - \sqrt{x+1} = 0$

$x = 0$

$y'' = -\frac{\sqrt{x+1}}{2}$

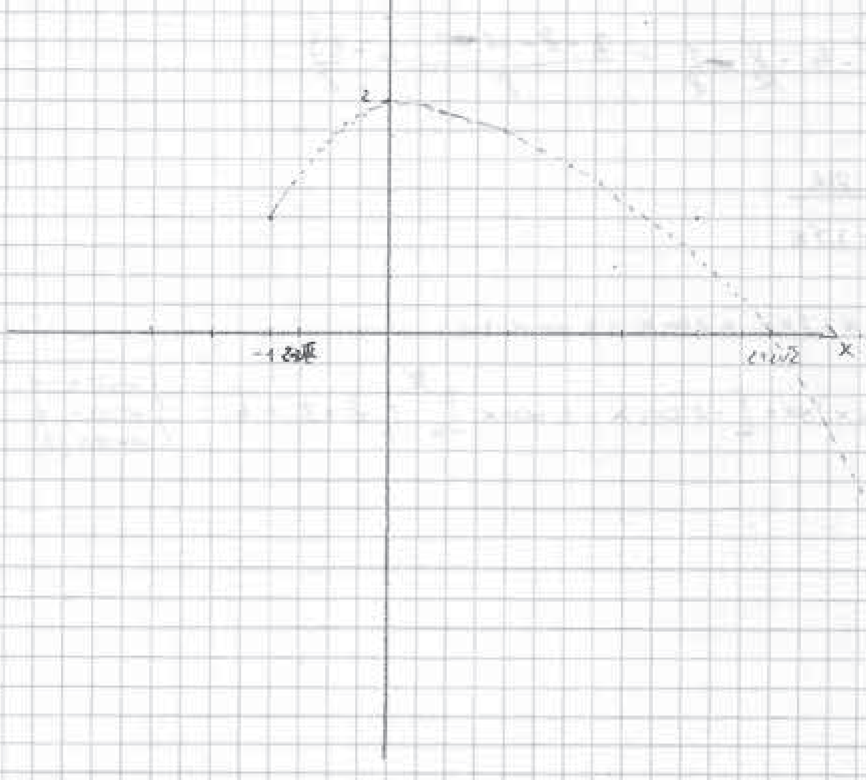
$y''_{x=0} = -\frac{1}{2}$ la funzione in $x=0$ ha un massimo relativo il cui valore è:

$f(0) = 2.$

$y'' > 0$

$-\frac{\sqrt{x+1}}{2} > 0$ impossibile.

La concavità è dunque negativa.



Es n° 248 pag 832

$$\int_0^2 (3x^2+2x-1)\,dx$$

$$\int (3x^2+2x-1)\,dx = x^3+x^2-x+c$$

Applico la formula di Torricelli:

$$\int_0^2 (3x^2+2x-1)\,dx = \left[x^3+x^2-x\right]_0^2 = 8+4-2 = 10$$

Es n° 249 pag 832

$$\int_{-3}^5 3\sqrt{4+x}\,dx$$

$$\int 3\sqrt{4+x}\,dx = 3\int\sqrt{4+x}\,dx = 3\int(4+x)^{\frac12} = 3\cdot\frac{2}{3}(4+x)^{\frac32}+c = 2\sqrt{(4+x)^3}+c$$

$$\int_{-3}^5 3\sqrt{4+x}\,dx = \left[2\sqrt{(4+x)^3}\right]_{-3}^5 = 54-2 = 52$$

Es n° 258 pag 832

$$\int_{-2}^1 \left(x^3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx$$

$$\int\left(x^3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx = \frac14 x^4-\frac1x+\frac{1}{2x^2}+c$$

$$\int_{-2}^1 \left(x^3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx = \left[\frac14 x^4-\frac1x+\frac{1}{2x^2}\right]_{-2}^1 =$$

$$= \frac14 - 1 + \cancel{\frac12} - 4 - \cancel{\frac12} - \frac18 = \frac{2-8-32-1}{8} = -\frac{39}{8}$$

Es n° 266 pag 832

$$\int_0^\pi (2\sin x-3\cos x)\,dx$$

$$\int(2\sin x-3\cos x)\,dx = -2\cos x-3\sin x+c$$

$$\int_0^\pi (2\sin x-3\cos x)\,dx = \left[-2\cos x-3\sin x\right]_0^\pi = 2+2 = 4 \quad \left\{\begin{array}{ll}\cos\pi=-1 & \\ \cos 0 = 1 & \sin 0 = 0 \\ \sin\pi = 0 & \end{array}\right\}$$

Un successione è una funzione che ha per dominio N e ha valori in R.

Pag 202 es n: 234, 200, 355

Orale: teorema sul punto di flesso. Definizione di flesso.
Ordine dispari flesso
Ordine pari massimo o minimo

Eserc: determinare l'area delimitata dalle curve date e dall'asse delle x. Verificare che le curve

$y = \operatorname{sen} 2x$ $\qquad\qquad$ $y = \operatorname{sen} x$, hanno in comune il punto di ascissa $x = \frac{\pi}{3}$

$0 \leq 2x \leq 2\pi$

$\boxed{0 \leq x \leq \pi}$

La funzione periodica ha un periodo di π.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x)\, dx$$

$$\int (\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x)\, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + \cos x + c$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x)\, dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = +\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1+2+2-4}{4} = \frac{1}{4}$$

Es 258 pag 832

$$\int_1^4 \frac{1+x}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int \frac{1+x}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \int \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx + \int x \cdot x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

$$\int_1^4 \frac{1+x}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^4 = 4 + \frac{16}{3} - 2 - \frac{2}{3} = 2 + \frac{14}{3} = \frac{20}{3}$$

Es n: 262 pag 833

$$\int_1^9 \frac{x^2+1}{x\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{x^2}{x\sqrt{x}}\,dx + \int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = \int x^2 \cdot x^{-\frac{3}{2}}\,dx + \int x^{-\frac{3}{2}}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx + \int x^{-\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + c$$

$$\int_1^9 \frac{x^2+1}{x\sqrt{x}}\,dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^9 = 18 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + 2 = 20 - \frac{4}{3} = \frac{56}{3}$$

Es n: 264 pag 833

$$\int_{-3}^{5} (2x - 3x^2 + 5)\,dx$$

$$\int (2x - 3x^2 + 5)\,dx = x^2 - x^3 + 5x + c$$

$$\int_{-3}^{5} (2x - 3x^2 + 5)\,dx = \left[x^2 - x^3 + 5x\right]_{-3}^{5} = 25 - 125 + 25 - 9 - 27 + 15 = -56$$

Es n: 1 pag 855

Trovare l'area della regione di piano limitata dall'asse x e dall'arco di parabola $y = -x^2 + x + 2$ che sta al di sopra dell'asse x.

$$\begin{cases} y = -x^2 + x + 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$-x^2 + x + 2 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm 3}{2} < \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\,dx$$

$$\int (-x^2 + x + 2)\,dx = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + c$$

$$\int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2} = -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

Essendo F(x) una primitiva della f(x), **Formula di Torricelli**

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

essendo F(x) una primitiva della funzione f(x)

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \quad \text{dove } c \text{ è una qualunque costante.}$$

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) + k \quad \text{dove } k \text{ è una opportuna costante da determinare.}$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(a) + k$$

$$k = -F(a)$$

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Disposizioni semplici e permutazioni

(1) $D_k n = n(n-1)(n-2) \dots \underbrace{[n-(k-1)]}_{\text{ultimo fattore}}$ $\quad D_1 n = n$

$$D_{q+1} n = (n-q) \cdot D_q n$$

Sia q un numero intero minore di n.

Supponiamo che la (1) sia vera ~~fino~~ e applichiamola alla classe q+1.

$$D_{q+1} n = \underbrace{n(n-1)(n-2) \dots [n-(q-1)]}_{D_q n}\,\underbrace{(n-q)}_{\text{ultimo fattore}}$$

$$\boxed{D_{q+1} n = (n-q)\, D_q n}$$

numero delle disposizioni di n oggetti di classe q

Applico il principio di induzione completa:

$$D_2 n = (n-1)\, D_1 n$$

$$D_3 n = (n-2)\, D_2 n$$

$$D_4 n = (n-3)\, D_3 n$$

$$D_k n = [n-(k-1)] \cdot D_{k-1} n$$

ho moltiplicato i primi membri fra loro e i secondi membri fra loro

$$\boxed{D_k n = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots [n-(k-1)]}$$

$$D_n n = n \cdot (n-1)(n-2) \dots 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n!$$

Le disposizioni di n oggetti di classe n si dicono permutazioni.

$P_n = D_n n = n! = n! = !n$

Combinazioni semplici

~~Disposizioni composte~~ ~~ovvero combinazioni~~

$$\boxed{C_k n = \frac{D_k n}{k!}}$$

$k! \cdot C_k n = D_k n$

$$C_k n = \frac{D_k n}{k!}$$

<u>Es n. 22 pag 845</u>

Sapendo che in un circuito l'intensità di corrente è data da:

$$i = \frac{t}{1+t^4}$$

determinare la quantità di elettricità che passa attraverso il circuito nell'intervallo di tempo che va dall'istante $t = 1$ all'istante $t = \sqrt[4]{3}$.

La corrente non è continua.

dt, lasso di tempo compreso fra 1 e $\sqrt[4]{3}$

$i = \frac{dQ}{dt}$ corrente continua

Se $Q = f(t)$ e i è la derivata di Q.

Q' sarebbe l'intensità $\left(i = \frac{t}{1+t^4}\right)$, quindi $\int i\,dx = Q(f(t))$

$$\int_1^{\sqrt[4]{3}} \frac{t}{1+t^4}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt[4]{3}} \frac{2t}{1+(t^2)^2}\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t^2 + c$$

$$\int_1^{\sqrt[4]{3}} \frac{t}{1+t^4}\,dt = \left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t^2\right]_1^{\sqrt[4]{3}}$$

$F(t) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t^2$

$$\int_1^{\sqrt[4]{3}} f(t) = F(1) - F\sqrt[4]{3} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8} = \frac{4\pi - 3\pi}{24} = \frac{\pi}{24}\ C$$

Es n° 1 pag 846

Quanti numeri interi di 3 cifre tutte distinte si possono formare con le cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6 ?

$D_3 6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

Es n° 2 pag 846

Quante bandiere tricolori distinte si potrebbero formare con il rosso, verde, bianco e giallo?

$D_3 4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Es n° 5 pag 846

Quanti anagrammi si possono formare con le lettere della parola "Napoli"?

$P_6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

Es n° 8 pag 847

Quanti ambi formare con i 90 numeri del lotto? E quanti terni?

$D_2 90 = 90 \cdot 89 = 8010$

$C_2 90 = \frac{8010}{2} = 4005$ $\qquad C_k n = \frac{D_k n}{k!}$

$C_3 90 = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{6} = 117\,480$

Es n° 13 pag 847

Quanti sono i numeri di 5 cifre tutte diverse che non contengono né lo 0, né il 3, né il 6.

$\cancel{0}, 1, 2, \cancel{3}, 4, 5, \cancel{6}, 7, 8, 9$

$D_5 7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$

Es n: 31 pag 844

Calcolare il valor medio della funzione

$$y = \frac{\lg x}{\sqrt{x}}$$

nell'intervallo che ha per estremi $x = 1$ e $x = e$

$$\mu = \frac{\int_1^e \frac{\lg x}{\sqrt{x}}\,dx}{e-1}$$

$$\int_1^e \frac{\lg x}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int \frac{\lg x}{\sqrt{x}}\,dx = \int (x^{-\frac{1}{2}} \lg x)\,dx = 2\sqrt{x} \cdot \lg x - \int \left(\frac{1}{x} \cdot 2x^{\frac{1}{2}}\right)dx = 2\sqrt{x}\,\lg x - 2\int x^{-1} \cdot x^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$=^{*} 2\lg x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + c \qquad \left[\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\sqrt{x} + c \text{ perché } D\,2\sqrt{x} = x^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$F(x) = 2\lg x\sqrt{x} - 4\sqrt{x}$$

$$\int_1^e \frac{\lg x}{\sqrt{x}}\,dx = F(b) - F(a) = 2\lg e\sqrt{e} - 4\sqrt{e} + 4 = 2\sqrt{e} - 4\sqrt{e} + 4 = 4 - 2\sqrt{e} \quad (\lg e = 1)$$

$$^{*}D(2\lg x\sqrt{x} - 4\sqrt{x}) = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} + 2\lg x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{x}\sqrt{x} + \frac{\lg x}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2}{x}\sqrt{x} + \frac{\lg x}{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{\lg x}{\sqrt{x}}$$

$$\mu = \frac{4 - 2\sqrt{e}}{e-1}$$

Es n: 33 pag 845

Un corpo materiale si muove in linea retta secondo la legge oraria:

$$x = t^5$$

ove x è lo spazio percorso nel tempo t. Sapendo che il corpo è soggetto ad una forza F legata alla velocità v dalla relazione:

$$F = v^2 + 3v,$$

trovare il lavoro effettuato dalla forza quando il corpo si sposta dalla posizione $x = 0$ alla posizione $x = 1$.

$$x = t^5 \Rightarrow v = 5t^4$$

$$F = v^2 + 3v$$

$$F = 25t^8 + 15t^4$$

$$x = t^5 \Rightarrow t = \sqrt[5]{x}$$

$$F = 25\sqrt[5]{x^8} + 15\sqrt[5]{x^4}$$

$$\int_0^1 (25\sqrt[5]{x^8} + 15\sqrt[5]{x^4})\,dx$$

$$\int (25\sqrt[5]{x^8} + 15\sqrt[5]{x^4})\,dx = 25\int x^{\frac{8}{5}}\,dx + 15\int x^{\frac{4}{5}}\,dx = 25 \cdot \frac{5}{13}x^{\frac{13}{5}} + 15 \cdot \frac{5}{9}x^{\frac{9}{5}} + C =$$

$$\frac{125}{13}\sqrt[5]{x^{13}} + \frac{75}{9}\sqrt[5]{x^9} + C.$$

$$F(x) = \frac{125}{13}\sqrt[5]{x^{13}} + \frac{75}{9}\sqrt[5]{x^9}$$

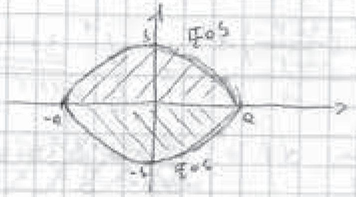
$$\int_0^1 (25\sqrt[5]{x^8} + 15\sqrt[5]{x^4})\,dx = F(1) - F(0) = \frac{125}{13} + \frac{75}{9} = \frac{1125+375}{117} = \frac{2100}{47} = \frac{700}{39}$$ Newton

$$L = F \cdot s = \frac{700}{39} \cdot 1 = \frac{700}{39} \text{ Joule}$$

Es n. 28 pag 837

Calcolare l'area delimitata dall'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\frac{b}{a}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$\frac{b}{a}\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{b}{a}\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsen\frac{x}{a}\right]$$

$$F(x) = \frac{b}{a}\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsen\frac{x}{a}\right]$$

$$\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2} = F(a) - F(-a) = \frac{ab}{2}\arcsen 1 - \frac{ab}{2}\arcsen(-1) = \frac{ab}{2}\arcsen 1 + \frac{ab}{2}\arcsen 1 = ab\arcsen 1 = \frac{\pi}{2}ab$$

$$A = 2 \cdot \frac{\pi}{2}ab = \pi ab$$

Es n. 50 pag 844

In un moto rettilineo la velocità di un punto è legata al tempo dalla relazione:

$$v=\frac{3+t}{\sqrt{1+t}}.$$

Determinare la velocità media nell'intervallo di tempo che va dall'istante $t=0$, all'istante $t=1$.

$$V_m=\mu=\frac{\int_0^1\left(\frac{3+t}{\sqrt{1+t}}\right)dt}{1}=\int_0^1\frac{3+t}{\sqrt{1+t}}\,dt$$

$$\int(3+t)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t}}\,dt=(3+t)\cdot 2\sqrt{1+t}-\int 2\sqrt{1+t}\,dt=$$

$$2(3+t)\sqrt{1+t}-2\int\sqrt{1+t}\,dt=2(3+t)\sqrt{1+t}-2\cdot\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}+C=$$

$$2(3+t)\sqrt{1+t}-\frac{4}{3}\sqrt{(1+t)^3}.$$

$$\int_0^1\frac{3+t}{\sqrt{1+t}}=\left[2(3+t)\sqrt{1+t}-\frac{4}{3}\sqrt{(1+t)^3}\right]_0^1=8\sqrt{2}-\frac{4}{3}\cdot2\sqrt{2}\;{}^{-6+\frac{4}{3}}=8\sqrt{2}-\frac{8}{3}\sqrt{2}\;{}^{-6+\frac{4}{3}}=\frac{16}{3}\sqrt{2}-6+\frac{4}{3}=$$

$$\frac{16}{3}\sqrt{2}-\frac{14}{3}.$$

Es n: 34 pag 845

Un corpo P di massa unitaria, si muove di moto rettilineo e la sua accelerazione è legata al tempo dalla relazione:

$$a = 20t^3$$

Sapendo che nell'istante $t=2$ la sua ascissa è di m 34 e la velocità di m 80, trovare il lavoro compiuto dalla forza applicata al punto, nell'intervallo di tempo che va da $t=0$ a $t=1$

$a = 20t^3$

$s(2) = 34\,m$ spazio percorso nell'istante 2.

$V(2) = 80\ m/sec$ velocità nell'istante 2

$L = ?$ in $0<t<1$

$V'(t) = a$

$V'(t) = 20t^3$

$\int_2^t V'(t) = \int_2^t 20t^3$

$[V(t)]_2^t = [5t^4]_2^t$

$V(t) - V(2) = 5t^4 - 80$

$V(t) = 5t^4$ eq. parametrica

$V(t) = s'(t)$

$s'(t) = 5t^4$

$\int_2^t s'(t) = \int_2^t 5t^4$

$[s(t)]_2^t = [t^5]_2^t$

$s(t) - s(2) = t^5 - 32$

$s(t) = t^5 + 2$

$\int 20t^3\,dt = 5t^4 + c$

$V = 5t^4 + c$

$80 = 80 + c \Rightarrow c = 0$

$V = 5t^4$

$\int 5t^4\,dt = t^5 + c$

$x = t^5 + c$

$34 = 32 + c \Rightarrow c = 2$

$x = t^5 + 2$

x	t
2	0
3	1

$s = 3 - 2 = 1\ m$

$\vec{F} = m\vec{a}$ $m = 1\ kg$

$F = 1 \cdot 20t^3\ [m/sec^2 \cdot kg] = [N]$

$L = \int_0^1 \vec{F} \times ds$

$t = 2$, 34

mot. rett. un. $x = Vt + X_0$

mot. rett. uniformemente accelerato $x = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + X_0$

$x = f(t)$

$V = x' = f'(t)$

$a = x'' = V'$

$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + X_0$

$x = 6t^2 + 5t + 5$

$V = 12t + 5$

$V = at + V_0$

$V' = a$

[ds : spostamento]

$L = \int_0^1 F \cdot ds\ dt = \int_0^1 20t^3 \cdot 5t^4\ dt = 100\int_0^1 t^7\,dt = 100 \cdot \frac{1}{8}t^8 + c = \frac{25}{2}t^8 + c.$

$F(t) = \frac{25}{2}t^8$

$100\int_0^1 t^7 = F(1) - F(0) = \frac{25}{2}$ Joule.

differenziale

$dL = F \times ds$ $\quad ds = dx = 5t^4\,dt$

$L = \int_0^1 20t^3 \cdot 5t^4\ dt = \int_0^1 100\,t^7\,dt = \left[\frac{25}{2}t^8\right]_0^1 = \frac{25}{2}$ Joule

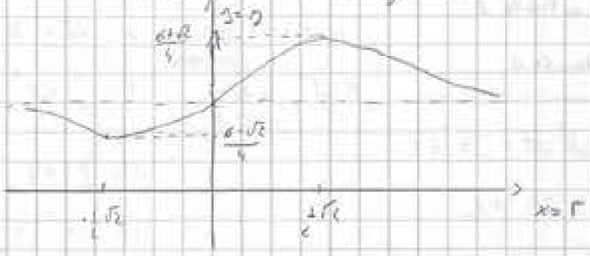
Es n° 40 pag 268

Studiare la sg funzione:

$$y=\frac{6x^2+2x+3}{4x^2+2}$$ [illegible]

Effettuata la sostituzione $x=t$, $y=s$, si interpreti la s come la distanza percorsa su di una retta da un punto al variare del tempo t. Si dica per quali valori del tempo t positivo, la velocità è massima in modulo e si descriva il moto del punto.

Facoltativamente, si interpreti il significato della funzione per $t<0$



$$s=\frac{6t^2+2t+3}{4t^2+2}$$

Il movimento del punto avviene sull'asse $y=s$. per $t<-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ il punto si muove da un punto vicinissimo a $\frac{3}{2}$, verso il punto $\frac{6-\sqrt{2}}{4}$, per $-\frac{1}{2}\sqrt{2}<t<0$ il punto si avvicina a $\frac{3}{2}$, per $t=0$ il punto è su $\frac{3}{2}$ e per $0<t<\frac{1}{2}\sqrt{2}$ si avvicina al punto $\frac{6+\sqrt{2}}{4}$, per $t=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ il punto è su $\frac{6+\sqrt{2}}{4}$ e per $t>\frac{1}{2}\sqrt{2}$ il punto si avvicina indefinitamente a $\frac{3}{2}$.

$$s'=\frac{-8t^2+4}{(4t^2+2)^2}$$

$$V=\frac{-8t^2+4}{(4t^2+2)^2}.$$

$V<0$ per $t<-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ e $t>\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$V>0$ per $-\frac{1}{2}\sqrt{2}<t<\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

 Es n° 38 pag 967

1) Data, in un sistema di assi cartesiani ortogonali, la parabola di equazione:

$$y = x^2+2x+1$$

si scriva l'equazione della retta che, nella regione finita di piano limitata dalla stessa parabola e dagli assi, sia tangente alla curva e formi con gli assi stessi il triangolo di area massima.

2) Data, in una circonferenza di raggio 2, l'angolo al centro $A\hat{O}B$, si determini sulla corda AB, da parte opposta rispetto al centro O, il triangolo isoscele ABC avente per base AB e per altezza $CH = 2k \cdot AB$.
Si determini il valore dell'angolo $A\hat{O}B$ per il quale il quadrilatero OACB ha area massima. Si calcoli, poi, il valore di k per cui l'ampiezza dell'angolo $O\hat{A}B$ del quadrilatero ottenuto sia 150°.

3) Si studi la funzione

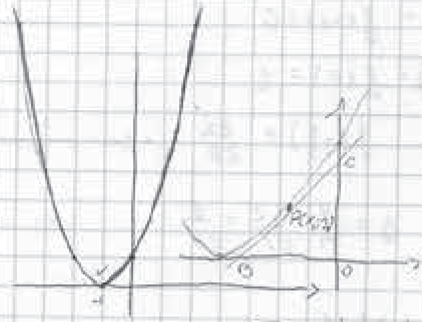
$$y = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

e se ne disegni il grafico.
Si scrivano l'equazione della parabola avente come asse l'asse delle ordinate, vertice nel punto (0,1) e tangente alla curva, e quella della parabola a questa simmetrica rispetto alla congiungente i punti di contatto.
Si calcolino le aree delle tre regioni finite di piano limitate dalle due parabole e dalla curva.

4) Si dimostri la continuità delle funzioni derivabili.

---

1) $y = x^2+2x+1$



$\overline{OB} = |OB|$

$V = \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$

$y = mx - mx_1 + y_1$

$y' = 2x+2$

$m = y'_{x=x_1} = 2x_1+2$

$y = (2x_1+2)x - x_1(2x_1+2) + y_1$

$y - y_1 = (2x_1+2)(x-x_1)$

$-y_1 = (2x_1+2)(x-x_1) \qquad y=0$

$-y_1 = (2x_1+2)x - (2x_1+2)x_1$

$x = \dfrac{x_1(2x_1+2) - y_1}{2x_1+2}$ = ~~...~~ è numero negativo.

$\overline{OB} = \dfrac{y_1 - x_1(2x_1+2)}{2x_1+2}$ (misura di OB).

$y = -x_1(2x_1+2) + y_1 \qquad x<0$

$\overline{GC} = -x_1(2x_1+2) + y_1$ (numero positivo).

$$s = \frac{y_1 - x_1(2x_1+2)}{\cancel{4}x_1+\cancel{4}} \cdot (y_1 - 2x_1^2 - 2x_1)$$

$y_1 = x_1^2 + 2x_1 + 1$

$$s = \frac{(x_1^2+\cancel{2x_1}+1-2x_1^2-\cancel{2x_1})(x_1^2+\cancel{2x_1}+1-2x_1^2-\cancel{2x_1})}{4x_1+4}$$

$$s = \frac{(-x_1^2+1)(-x_1^2+1)}{4x_1+4}$$

$$s = \frac{(x_1^2-1)\cdot\cancel{(x_1+1)}\cdot(x_1-1)}{4\cancel{(x_1+1)}} \; ; \quad \begin{cases} s = \frac{1}{4}(x_1^2-1)(x_1-1) \\ -1<x_1<0 \end{cases}$$

$$s = \frac{1}{4}(x_1^3 - x_1^2 - x_1 + 1)$$

$$\begin{cases} z = x_1^3 - x_1^2 - x_1 + 1 \\ -1 < x_1 < 0 \end{cases}$$

$z' = 3x_1^2 - 2x_1 - 1$

$3x_1^2 - 2x_1 - 1 = 0$

$x_1 = \frac{1 \pm 2}{3} \begin{matrix} \nearrow -\frac{1}{3} \\ \searrow 1 \end{matrix}$

$z'' = 6x_1 - 2$

$z''_{x=-\frac{1}{3}} = -2-2 = -4 < 0$

$\lim_{x_1 \to -1} f(x_1) = f(-1) = 0$

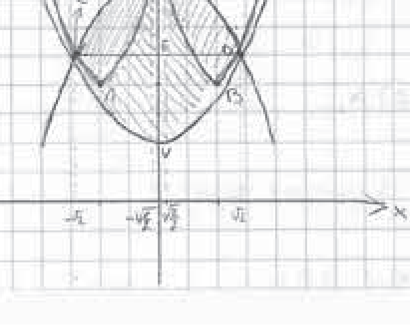
$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$

$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{27}$ maggiore di 0 e di 1, quindi è il max assoluto

$s = \frac{1}{4} \cdot \frac{32}{27} = \frac{8}{27}$ Area massima.

3) $y = \frac{x^2+1}{x^2}$

Per lo studio della funzione vedi pag 77a.



30 Trovo l'eq. della parabola che ha come asse l'asse delle ordinate, vertice in $V(0;1)$ e tangente alla curva:

$y = ax^2 + bx + c$

$-\frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0$

$V\begin{cases} x = 0 \\ c = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} y = ax^2 + 1 \\ y = x^2 + \frac{1}{x^2} \end{cases}$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = ax^2 + 1$

$(a-1)x^4 + x^2 - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 4(a-1) = 4a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$

$y = \frac{3}{4}x^2 + 1$ eq. della parabola richiesta.

Trovo i punti di contatto tra la parabola e la curva:

$\begin{cases} y = x^2 + \frac{1}{x^2} \\ y = \frac{3}{4}x^2 + 1 \end{cases}$

$\frac{3}{4}x^2 + 1 = x^2 + \frac{1}{x^2}$

$3x^4 + 4x^2 = 4x^4 + 4$

$x^4 - 4x^2 + 4 = 0$

$x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$y = \frac{5}{2}$

$C(-\sqrt{2}; \frac{5}{2})$; $D(\sqrt{2}; \frac{5}{2})$

Trovo l'eq. della parabola simmetrica a quella precedente rispetto alla congiungente di C e D:

$y = ax^2 + c$

$V\begin{cases} x = 0 \\ y = (\frac{5}{2} - 1) + \frac{5}{2} = 4 \end{cases}$ ($VE = V'E$, perché devono essere simmetrici)

$y = ax^2 + 4$ (la parabola passa per C e D)

$\frac{5}{2} = 2a + 4$ passaggio per C e D.

$a = -\frac{3}{4}$

$y = -\frac{3}{4}x^2 + 4$

Trovo i punti d'intersezione fra la curva e questa seconda parabola:

$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x^2 + 4 \\ y = x^2 + \frac{1}{x^2} \end{cases}$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = -\frac{3}{4}x^2 + 4$

$4x^4 + 4 = -3x^4 + 16x^2$

$7x^4 - 16x^2 + 4 = 0$

$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{7} = \frac{8 \pm 6}{7} \begin{cases} \frac{2}{7} \\ 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{2}{7}} \\ y = \frac{53}{14} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$ $F(-\sqrt{\frac{2}{7}}; \frac{53}{14})$; $G(\sqrt{\frac{2}{7}}; \frac{53}{14})$; C e D.

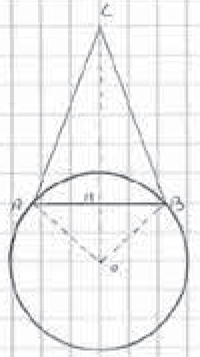
$$\int_{\sqrt{\frac{2}{7}}}^{\sqrt{2}}\left(-\frac{3}{4}x^2+4-x^2-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[-\frac{7}{12}x^3+4x+\frac{1}{x}\right]_{\sqrt{\frac{2}{7}}}^{\sqrt{2}}=-\frac{7}{6}\sqrt{2}+4\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{2}{7}}-4\sqrt{\frac{2}{7}}-\frac{7}{2}\sqrt{\frac{2}{7}}=$$

$$=\frac{-7+24+3}{6}\sqrt{2}+\frac{1-24-21}{6}\sqrt{\frac{2}{7}}=\frac{10}{3}\sqrt{2}-\frac{22}{3}\sqrt{\frac{2}{7}}$$. Area trapezoidi FCA e GDB

$$\int_0^{\sqrt{2}}\left(-\frac{3}{4}x^2+4-\frac{3}{4}x^2-1\right)dx=\int_0^{\sqrt{2}}\left(-\frac{3}{2}x^2+3\right)dx=\left[-\frac{1}{2}x^3+3x\right]_0^{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}+3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$ Area trapezoide CFH, GDV

4) Vedere pag. 5 b della teoria.

2)



$CH = 2k\,AB$

$AO = r$

pongo $\overline{HB} = x \qquad 0 < x < r$

$\overline{OH} = \sqrt{r^2-x^2}$

$CH = 4kx$

$A_{ABC} = 2x \cdot 4kx \cdot \frac{1}{2} = x \cdot 2kx = 2kx^2$

$A_{ABO} = \cancel{2}x \cdot \sqrt{r^2-x^2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = x\sqrt{r^2-x^2}$

$A_{OACB} = 2kx^2 + x\sqrt{r^2-x^2}$

$\boxed{z = 2kx^2 + x\sqrt{r^2-x^2}}$ equazione del problema

$$z' = 4kx + \sqrt{r^2-x^2} + x \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{r^2-x^2}} \cdot -\cancel{2}x = 4kx + \sqrt{r^2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} = 0$$

$4kx\sqrt{r^2-x^2} + r^2 - x^2 - x^2 = 0 \qquad x \neq r$

$4kx\sqrt{r^2-x^2} = 2x^2 - r^2$

$16k^2x^2r^2 - 16k^2x^4 = 4x^4 - 4r^2x^2 + r^4$

$(16k^2+4)x^4 - 2(8k^2r^2+2r^2)x^2 + r^4 = 0$

$$x^2 = \frac{-8k^2r^2+2r^2 \pm \sqrt{64k^4r^4+16k^2r^4+4r^4-16k^2r^4-4r^4}}{16k^2+4}$$

$$x^2 = \frac{-8k^2r^2+2r^2 \pm 8k^2r^2}{16k^2+4} \begin{cases} \frac{-16k^2r^2+2r^2}{16k^2+4} = \frac{r^2-8k^2r^2}{8k^2+2} \\ \frac{2r^2}{16k^2+4} = \frac{r^2}{8k^2+2} \end{cases}$$

$$x = \frac{r\sqrt{1-8k^2}}{\sqrt{8k^2+2}}$$

$$x = \frac{r}{\sqrt{8k^2+2}}$$

$$z'' = 4k\sqrt{r^2-x^2} + 4kx \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{r^2-x^2}} \cdot -\cancel{2}x - 4x$$

$$z'' = 4k\sqrt{r^2-x^2} - \frac{4kx^2}{\sqrt{r^2-x^2}} - 4x = \frac{4kr^2 - 8kx^2 - 4x\sqrt{r^2-x^2}}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

$$z''_{x=\frac{r}{\sqrt{8k^2+2}}} = \frac{4kr^2 - 8k\left(\frac{r^2}{8k^2+2}\right) - 4 \cdot \frac{r}{\sqrt{8k^2+2}} \cdot \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{8k^2+2}}}{\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{8k^2+2}}} = \frac{4kr^2 - \frac{8kr^2}{8k^2+2} - \frac{4r}{\sqrt{8k^2+2}} \cdot \sqrt{\frac{8k^2r^2+r^2}{8k^2+2}}}{\sqrt{\frac{8k^2r^2+r^2}{8k^2+2}}} =$$

$$\frac{4kr^2 - \frac{8kr^2}{8k^2+2} - \frac{4r}{\sqrt{8k^2+2}} \cdot r\frac{\sqrt{8k^2+1}}{\sqrt{8k^2+2}}}{\sqrt{\frac{8k^2r^2+r^2}{8k^2+2}}} = \frac{4kr^2 - \frac{8kr^2}{8k^2+2} - \frac{4r^2\sqrt{8k^2+1}}{8k^2+2}}{r\sqrt{\frac{8k^2+1}{8k^2+2}}} = \frac{\frac{32k^3r^2+8k\cancel{r^2}-8k\cancel{r^2}-4r^2\sqrt{8k^2+1}}{8k^2+2}}{r\sqrt{\frac{8k^2+1}{8k^2+2}}}$$

STOP

31 **Es:** Dato:

$y = tg\, x$

$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = 1$, trovare l'eq. della retta tangente alla data nel punto di ascissa $x = \frac{\pi}{4}$

$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$y'_{x=\frac{\pi}{4}} = 2$

$m = 2$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg\, x\, dx = -\lg|\cos x| + c$$

$F(x) = -\lg|\cos x|$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg\, x\, dx = F(\tfrac{\pi}{4}) - F(0) = -\lg\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \lg 1 = -\lg\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$ [NB: $\lg\frac{1}{2}\sqrt{2}$ è un numero negativo].

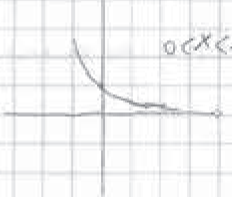
Esercizio:

$$\int_0^1 e^x\, dx = \left[e^x\right]_0^1 = e - 1 = e - 1$$

$\int e^x\, dx = e^x + c$

$F(x) = e^x$

$y = e^x$



Esercizio

$$\int \frac{x}{x^2 - 3x + 2}\, dx$$

$\frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$ esistono 2 costanti A e B che rendono l'uguaglianza un'identità.

$\frac{Ax - 2A + Bx - B}{(x-1)(x-2)}$

$\frac{(A+B)x - 2A - B}{(x-1)(x-2)}$

$\begin{cases} A + B = 1 \Rightarrow A = +1 - B \\ -2A - B = 0 \end{cases}$

$-2 + 2B - B = 0 \Rightarrow B = 2$ et $A = -1$

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)} = -\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2}$$

$$\int \frac{x}{(x-1)(x-2)}\,dx = -\int \frac{1}{x-1}\,dx + 2\int \frac{1}{x-2}\,dx = -\lg|x-1| + 2\lg|x-2| + c$$

Compito di Matematica del 19 4 1986 : FILA 2

1) Calcolare il seguente integrale e verificarne il risultato:

$$\int \frac{x-1}{x^2-x-6}\,dx$$

2) Data l'equazione oraria di un moto rettilineo

$$y = \frac{1}{3}t^3 - 3t$$

determinare:

a) gli istanti in cui il moto è retrogrado e gli istanti in cui è progressivo.

b) gli istanti in cui la velocità è $1\,\frac{m}{sec}$ e quelli in cui l'accelerazione è $6\,\frac{m}{sec^2}$

3) Studiare la seguente funzione:

$$y = \cos 2x + 2\sin x - 1$$

1) $\int \frac{x-1}{x^2-x-6}\,dx$

$$\frac{x-1}{x^2-x-6} = \frac{x-1}{(x+2)(x-3)}$$

$$\frac{x-1}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$$ esistono delle costanti A e B che rendono l'uguaglianza identica

$$\frac{x-1}{(x+2)(x-3)} = \frac{Ax-3A+Bx+2B}{(x+2)(x-3)}$$

$$\frac{x-1}{(x+2)(x-3)} = \frac{(A+B)x-3A+2B}{(x+2)(x-3)}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \Rightarrow A=1-B \\ -3A+2B=-1 \end{cases}$$

$$-3+3B+2B=-1 \Rightarrow B=\frac{2}{5}$$

$$A=\frac{3}{5}$$

$$\frac{x-1}{(x+2)(x-3)} = \frac{\frac{3}{5}}{x+2} + \frac{\frac{2}{5}}{x-3}$$

$$\int \frac{x-1}{x^2-x-6}\,dx = \frac{3}{5}\int \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{2}{5}\int \frac{1}{x-3}\,dx = \frac{3}{5}\lg|x+2| + \frac{2}{5}\lg|x-3| + c$$

Verifico:

$$D\left(\frac{3}{5}\lg|x+2| + \frac{2}{5}\lg|x-3| + c\right) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{x+2} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{x-3} \quad \frac{3}{5(x+2)} + \frac{2}{5(x-3)} = \frac{3x-9+2x+4}{5(x+2)(x-3)} = \frac{5x-5}{5(x+2)(x-3)} = \frac{5(x-1)}{5(x+2)(x-3)} =$$

$$= \frac{x-1}{x^2-x-6}$$

9) 2) $y=\frac{1}{3}t^3-9t$

$y'=v=t^2-9$

$t^2-9>0$ per $t<-3$ et $t>3$

$v>0$ per $t<-3$ et $t>3$

$v<0$ per $-3<t<3$

Il moto è progressivo per $t<-3$ et $t>3$ ed è retrogrado per $-3<t<3$.

~~v~~ $t^2-9=7 \Rightarrow t^2=16$

$t=\pm 4$

La velocità era di $7\ \frac{m}{sec}$ negli istanti $t=-4$ et $t=4$

$y''=a=2t$

$2t=6 \Rightarrow t=3$

L'accelerazione era di $6\ \frac{m}{sec}$ nell'istante $t=3$.

3) $y=\cos 2x+2\operatorname{sen}x-1$

f. trascendente periodica di periodo 2π. Può essere studiata in un intervallo lungo 2π, quale $[0,2\pi]$.

$f(0)=0$ D ~~$[0,2\pi]$~~

$f(2\pi)=0$

Punti d'incontro con l'asse delle x:

$\cos 2x+2\operatorname{sen}x-1=0$ $[\cos 2x=\cos^2x-\operatorname{sen}^2x;\ \cos^2x=1-\operatorname{sen}^2x.$

$\cos^2x-\operatorname{sen}^2x+2\operatorname{sen}x-1=0$

$1-\operatorname{sen}^2x-\operatorname{sen}^2x+2\operatorname{sen}x-1=0$

$\operatorname{sen}^2x-\operatorname{sen}x=0$

$\operatorname{sen}x=0 < \begin{matrix} x=0 \\ x=\pi \end{matrix}$

$\operatorname{sen}x=1 < \begin{matrix} x=\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{5}{2}\pi \end{matrix}$

I punti d'incontro con l'asse delle x sono:

$O(0,0)$, $B(\pi,0)$, $C(\frac{\pi}{2},0)$.

Segno della funzione:

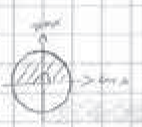
$-\operatorname{sen}^2x+\operatorname{sen}x>0$

$\operatorname{sen}^2x-\operatorname{sen}x<0$

$0<\operatorname{sen}x<1$

$\operatorname{sen}x<1\ \forall x$

$\operatorname{sen}x>0$ per $0<x<\pi$



Studio dell'andamento della funzione:

$y'=-2\operatorname{sen}2x+2\cos x$

$y'=-4\operatorname{sen}x\cos x+2\cos x$

$-2\sin x\cos x+\cos x\ge 0$

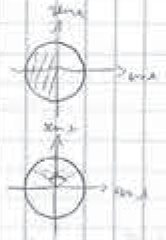
$-\cos x(2\sin x-1)\ge 0$

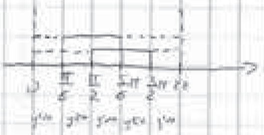
$-\cos x\ge 0$ per $\cos x\le 0$

$\frac{\pi}{2}\le x<\frac{3}{2}\pi$

$2\sin x-1\ge 0$ per $\sin x\ge\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5}{6}\pi$





Quindi:

per $0<x<\frac{\pi}{6}$ la funzione cresce

per $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$ la funzione decresce

per $\frac{\pi}{2}<x<\frac{5}{6}\pi$ la funzione cresce

per $\frac{5}{6}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$ la funzione decresce

per $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$ la funzione cresce.

Da ciò:

per $x=\frac{\pi}{6}$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$

per $x=\frac{\pi}{2}$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$f(\frac{\pi}{2})=0$ la ~~funzione~~ curva è tangente all'asse x.

per $x=\frac{5}{6}\pi$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f(\frac{5}{6}\pi)=\frac{1}{2}$

per $x=\frac{3}{2}\pi$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$f(\frac{3}{2}\pi)=-4$.

$y''=-4\cos 2x-2\sin x$

$y''=-2\cos^2x+2\sin^2x-\cancel{4}\sin x$

$y''=-2+2\sin^2x+2\sin^2x-\cancel{4}\sin x$

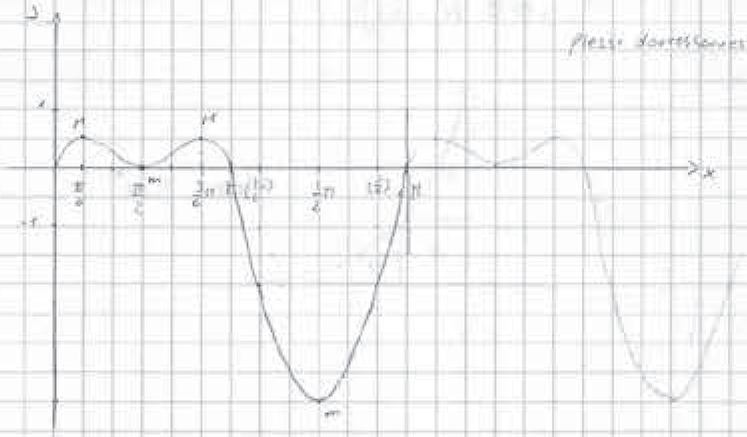
$y''=4\sin^2x-\cancel{4}\sin x-2$

$4\sin^2x-\sin x-2\ge 0$

$\sin x=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$

53

Flessi [illegible] $x=\frac{\pi}{3}$; $x=\frac{5}{3}\pi$; $x=\frac{7}{6}\pi$



Combinazioni semplici di n oggetti di classe k

$$C_k^{\,n} = \frac{D_k^{\,n}}{n!} = \binom{n}{k}$$ [illegible]

$\boxed{\text{Teorema}}$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{10}{7} = \binom{10}{3}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(k+1)}{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n-k)} \qquad n-n+k+1$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots\dots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\dots(n-k)}{k!\,(n-k)!} =$$

$$= \boxed{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

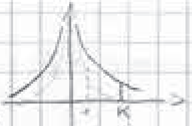
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$y = \frac{1}{x}$ iperbole equilatera riferita ai propri asintoti posta nei quadranti I e III

$$\int_1^k \frac{1}{x}\,dx = \left[\lg|x|\right]_1^k = \lg|k| - \lg 1 = \lg|k|$$

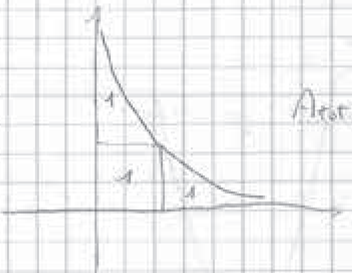
$$\lim_{k\to+\infty} \lg k = +\infty$$

$y = \frac{1}{x^2}$



$\mathcal{D}$ ... $\mathbb{R} - \{0\}$

$\int_1^k \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^k = -\frac{1}{k} + 1$



$A_{tot} = 3u^2$

$\lim_{k \to +\infty} \left(-\frac{1}{k} + 1\right) = 0 + 1 = 1$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{k \to +\infty} \int_1^k \frac{1}{x^2}\,dx$

Integrale improprio

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{k \to +\infty} \int_a^k f(x)\,dx$

Se l'integrale improprio da come risultato [illegible] è convergente.

(~~Le combinazioni di n el di classe k~~)

$\boxed{\text{Teorema}}$

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

consideriamo il sec membro

$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (k-1) \cdot k$

$(k-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (k-1)$

$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)\cdots(n-k)}{k!} + \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!} =$

$= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k) + k(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} =$

$= \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k+k)}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$

Dimostrare che:

$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ con lo scambio la formula $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$

34 Esercizio

Data la funzione $y = x^3$ calcolare l'eq. della tangente alla curva di eq. $y = x^3$ nel punto di ascissa $x = 2$.

$y = x^3 \qquad x = 2$

$y = 8 \Rightarrow P(2,8)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 8 = m(x - 2)$

$y' = 3x^2$

$y'_{x=2} = 12$

$y - 8 = 12(x - 2)$

$y = 12x - 16$

Infinitesimo:

un infinitesimo è una variabile che tende a zero.

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x = 1$

$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0 \qquad (\operatorname{sen} x$ è infinitesimo in $x)$

$\lim_{x \to 0} (1 - \cos x) = 0 \qquad (1 - \cos x$ è infinitesimo in $x)$

$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

$\lim_{x \to 0} (1 - \cos^2 x) = 0$

Due infinitesimi si dicono simultanei quando un infinitesimo per lo stesso incolente

$1 - \cos x$ e $\operatorname{sen} x$ per $x \to 0$ sono infinitesimi simultanei.

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$

Sia α un infinitesimo e β un altro simultaneo a α.

$\frac{\alpha}{\beta} \to \begin{cases} 0 \\ k \neq 0 \\ \infty \\ \text{non c'è limite} \end{cases}$

Due infinitesimi si dicono dello stesso ordine quando il limite del loro rapporto è una costante diversa da zero.

Es n° 38 pag 834

Risolvere i seguenti quesiti:

1): Si consideri nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ la funzione:

$$f(x) = 3\sin x - 2\sin^3 x$$

I) studiare la funzione e tracciarne il grafico

II) determinare le costanti a e b in modo che la funzione:

$$F(x) = a\cos x + b\cos^3 x,$$

sia una primitiva della funzione $f(x)$

III) Tenendo conto del risultato, ottenuto in II, calcolare l'area della regione piana definita dalle disuguaglianze:

$$0 \le x \le \pi \quad e \quad 0 \le y \le f(x)$$

2):

I) essendo m un parametro positivo, dire per quali valori di m il polinomio x^2+mx-2 è divisibile per il polinomio $mx-1$.

II) Supposto m positivo e diverso da uno, si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2+mx-2}{mx-1},$$

e, rispetto ad un sistema d'assi cartesiani ortogonali Oxy, si indichi con C_m il grafico della funzione $f(x)$ corrispondente al valore m del parametro. Calcolare la derivata di $f(x)$.

III) Per quali valori di m la $f(x)$ ammette un minimo relativo.

IV) Costruire il grafico di C_2 e $C_{\frac{1}{2}}$.

V) Mostrare che le curve C_m passano per 3 punti fissi.

VI) Sia $y = kx$ l'equazione di una retta r_k. Scrivere l'equazione le cui radici sono le ascisse dei punti d'intersezione di C_m e r_k.

---

1) I:

$y = 3\sin x - 2\sin^3 x$ funzione trascendente periodica di periodo 2π, la funzione può essere studiata in un intervallo lungo 2π, come $[-\pi, \pi]$

D $[-\pi, \pi]$

$f(-\pi) = 0$

$f(\pi) = 0$

Segno della funzione e incontro con gli assi cartesiani:

$3\sin x - 2\sin^3 x \ge 0$

$\sin x (3 - 2\sin^2 x) \ge 0$

$\sin x \ge 0$ per $0 \le x \le \pi$

$3 - 2\sin^2 x \ge 0 \Rightarrow -\sqrt{\frac{3}{2}} < \sin x < \sqrt{\frac{3}{2}} \ \forall x$

$\sin x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ impossibile

$f(x) \ge 0$ per $0 \le x \le \pi$

35 Studio dell'andamento della funzione:

$y' = 3\cos x - 6\,\text{sen}^2 x \cos x$

$y' = 3\cos x\,(1 - 2\,\text{sen}^2 x) \geq 0$

$3\cos x \geq 0$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$1 - 2\,\text{sen}^2 x \geq 0$

$-\frac{1}{2}\sqrt{2} \leq \text{sen}\,x \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\text{sen}\,x \geq -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

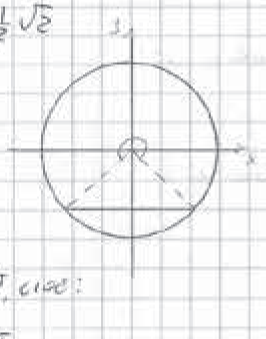
$0 \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$, cioè:
$0 \leq x < \pi$

$\frac{7}{4}\pi \leq x \leq 2\pi$ no

$0 \leq x \leq -\frac{\pi}{4}$

$-\frac{3}{4}\pi \leq x \leq -2\pi$, cioè:

$-\frac{3}{4}\pi \leq x < -\pi$



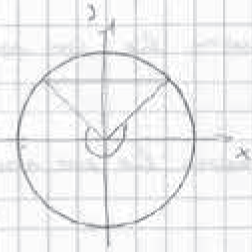
$\text{sen}\,x \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$

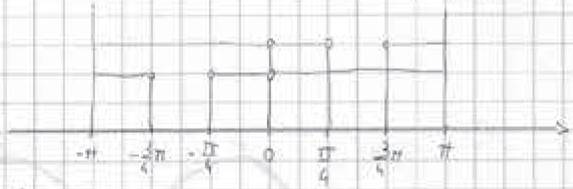
$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

$\frac{3}{4}\pi \leq x \leq 2\pi$, cioè:
$\frac{3}{4}\pi \leq x < \pi$

$0 \leq x \leq -\frac{5}{4}\pi$ cioè:
$0 \leq x < -\pi$

$-\frac{7}{4}\pi \leq x \leq -2\pi$ no



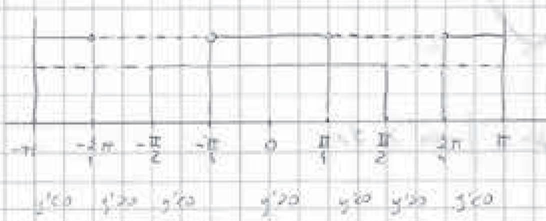


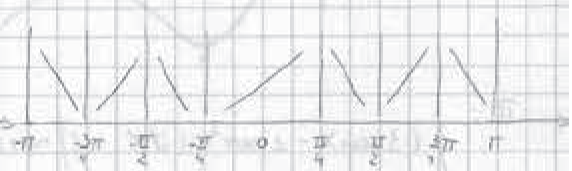
$1 - 2\,\text{sen}^2 x \geq 0$ per:

$-\pi < x < -\frac{3}{4}\pi$

$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$

$\frac{3}{4}\pi < x < \pi$





Quindi:

per $-\pi < x < -\frac{3}{4}\pi$ la funzione decresce

per $-\frac{3}{4}\pi < x < -\frac{\pi}{2}$ la funzione cresce

per $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{4}$ la funzione decresce

per $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ la funzione cresce

per $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ la funzione decresce

per $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{4}\pi$ la funzione cresce

per $\frac{3}{4}\pi < x < \pi$ la funzione decresce.

Quindi:

per $x = -\frac{3}{4}\pi$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$f(-\frac{3}{4}\pi) = -\sqrt{2}$

per $x = -\frac{\pi}{2}$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f(-\frac{\pi}{2}) = -1$

per $x = -\frac{\pi}{4}$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$f(-\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}$

per $x = \frac{\pi}{4}$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

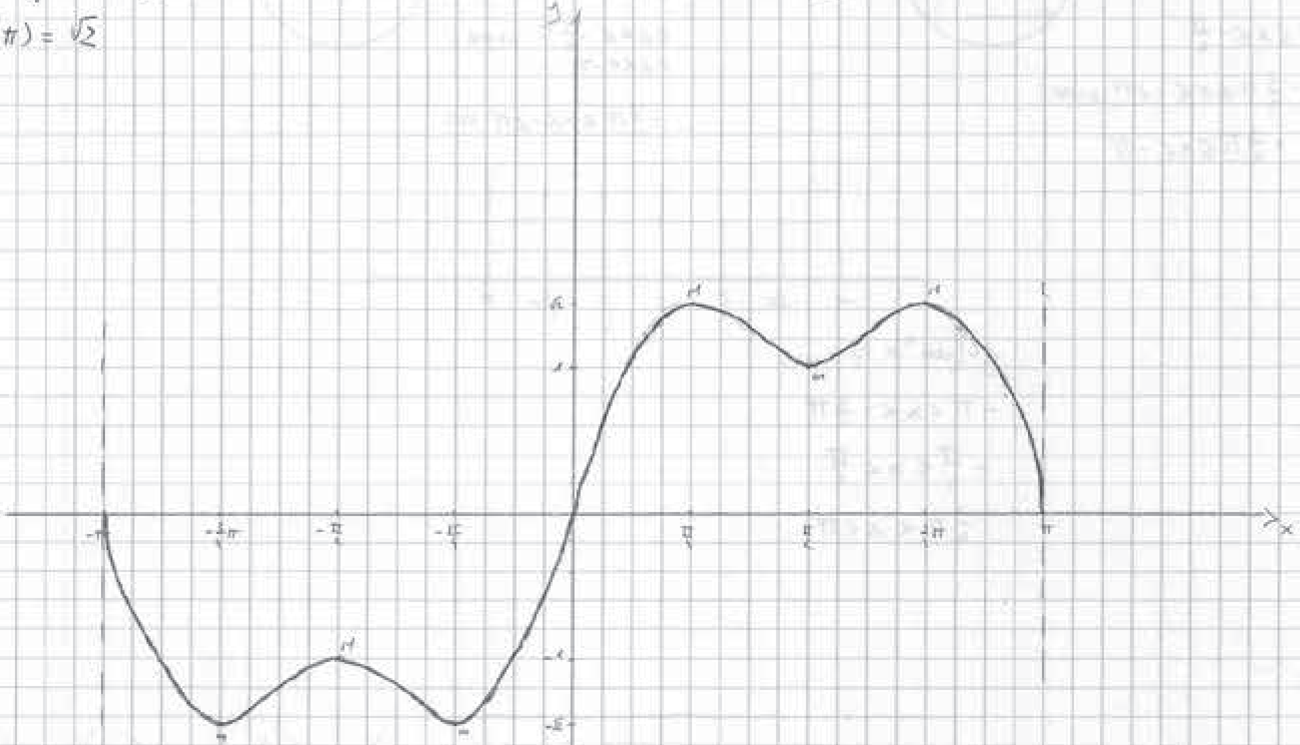
$f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

per $x = \frac{\pi}{2}$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$f(\frac{\pi}{2}) = 1$

per $x = \frac{3}{4}\pi$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f(\frac{3}{4}\pi) = \sqrt{2}$



II:

$$\int (3\,\text{sen}\,x - 2\,\text{sen}^3 x)\,dx = 3\int \text{sen}\,x\,dx - 2\int \text{sen}^3 x\,dx$$

$$\int \text{sen}\,x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \text{sen}^3 x\,dx = \int [\text{sen}\,x(1-\cos^2 x)]\,dx = (1-\cos^2 x)\cdot -\cos x - \int(-\cos x \cdot -2\cos x \cdot -\text{sen}\,x)\,dx =$$

$$= -\cos x\,(1-\cos^2 x) - 2\int \cos^2 x \cdot -\text{sen}\,x\,dx = -\cos x\,(1-\cos^2 x) - \frac{2}{3}\cos^3 x + c = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$$

$$\int (3\,\text{sen}\,x - 2\,\text{sen}^3 x)\,dx = -3\cos x + 2\cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x + c = -\cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x + c$$

$$F(x) = -\cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x$$

$$\int_0^{\pi} (3\,\text{sen}\,x - 2\,\text{sen}^3 x)\,dx = F(b) - F(a) = \left[-\cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x\right]_0^{\pi} = 1 + \frac{2}{3} + 1 + \frac{2}{3} = 2 + \frac{4}{3} = \frac{6+4}{3} = \frac{10}{3}$$

86 2) I:

$$\begin{array}{l|l} x^2+mx-2 & mx-1 \\ \cline{2-2} -x^2+\frac{x}{m} & \frac{x}{m}+\frac{m^2+1}{m^2} \\ \hline \quad \frac{m^2x+x}{m}-2 & \\ -\frac{m^2x+x}{m}+\frac{m^2+1}{m^2} & \\ \hline \quad \frac{m^2+1}{m^2}-2 & \end{array}$$

$x^2+mx-2 : mx-1 = \frac{x}{m}+\frac{m^2+1}{m^2}$

$R=\frac{m^2+1}{m^2}-2$

$\frac{m^2+1}{m^2}-2=0$

$m^2+1-2m^2=0 \Rightarrow m=1$ (-1 non è accettabile).

II:

$y=\frac{x^2+mx-2}{mx-1}$

$y'=\frac{(2x+m)(mx-1)-(x^2+mx-2)\cdot m}{(mx-1)^2}=\frac{2mx^2-2x+m^2x-m-mx^2-m^2x+2m}{(mx-1)^2}=\frac{mx^2-2x+m}{(mx-1)^2}$

III: $\frac{mx^2-2x+m}{(mx-1)^2}>0$

$mx^2-2x+m>0$

$x=\frac{1\pm\sqrt{1-m^2}}{m} < \begin{matrix}\frac{1-\sqrt{1-m^2}}{m}\\ \frac{1+\sqrt{1-m^2}}{m}\end{matrix}$

$y'>0$ per $x<\frac{1-\sqrt{1-m^2}}{m}$ et $x>\frac{1+\sqrt{1-m^2}}{m}$

per $x=\frac{1-\sqrt{1-m^2}}{m}$ la funzione ha un massimo relativo.

$\sqrt{1-m^2}>0 \Rightarrow 1-m^2>0 \Rightarrow -1<m<1$, ma date le limitazioni: $0<m<1$

IV: $y=\frac{x^2+2x-2}{2x-1}$

$D=\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}$

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x-2}{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2-\frac{2}{x}}{2-\frac{1}{x}}=\pm\infty$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{x^2+2x-2}{2x-1}=+\infty$ $(N<0)$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{x^2+2x-2}{2x-1}=-\infty$ $(N<0)$

asintoto obliquo di eq. $y=mx+q$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-2}{2x^2-x}=\frac{1}{2}$

$m=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+2x-2}{2x-1}-\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2+4x-4-2x^2+x}{4x-2}\right]=$

$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{5x-4}{4x-2}\right]=\frac{5}{4}$

$y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$

Segno della funzione e incontro con l'asse x:

$\frac{x^2+2x-2}{2x-1}\geq 0$

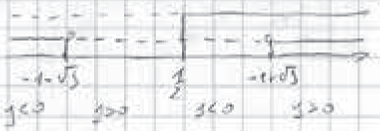
$x^2+2x-2\geq 0$

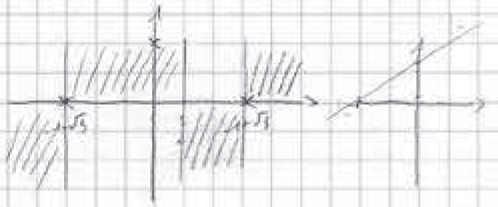
$x^2+2x-2=0$

$x=-1\pm\sqrt{1+2}=-1\pm\sqrt{3} < \begin{matrix}-1-\sqrt{3}\\ -1+\sqrt{3}\end{matrix}$

$x^2+2x-2\geq 0$ per $x\leq -1-\sqrt{3}$ et $x\geq -1+\sqrt{3}$

$2x-1>0$ per $x>\frac{1}{2}$





Punti d'incontro con l'asse y:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$$

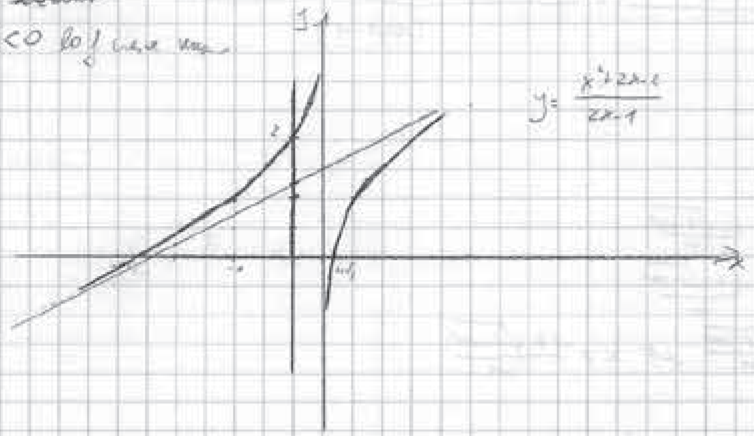
Studio dell'andamento della funzione:

$$y' = \frac{(2x+2)(2x-1) - 2(x^2+2x-2)}{(2x-1)^2} = \frac{4x^2+2x-2-2x^2-4x+4}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2-2x+2}{(2x-1)^2}$$

$y'>0$ per $2x^2-2x+2>0$

$2x^2-2x+2=0$

$\Delta<0$ [illegible]



$$y = \frac{x^2+\frac{1}{2}x-2}{\frac{1}{2}x-1}$$

$D = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\lim_{x\to\mp\infty} \frac{x^2+\frac{1}{2}x-1}{\frac{1}{2}x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}} = \mp\infty$$ la curva ha un asintoto obliquo.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+\frac{1}{2}x-2}{\frac{1}{2}x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+\frac{1}{2}x-2}{\frac{1}{2}x-1} = +\infty$$

$y = mx+n$ eq. dell'asintoto obliquo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\frac{1}{2}x-1}{\frac{1}{2}x^2-x} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$m=2$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+\frac{1}{2}x-2}{\frac{1}{2}x-1} - 2x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+\frac{1}{2}x-2-x^2+2x}{\frac{1}{2}x-1}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{2}x-2}{\frac{1}{2}x-1} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} = 5$$

$n=5$

$y=2x+5$ eq. dell'asintoto obliquo.

37 Segno della funzione

$$\frac{x^2+\frac{1}{2}x-2}{\frac{1}{2}x-1}>0$$

$x^2+\frac{1}{2}x-2>0$

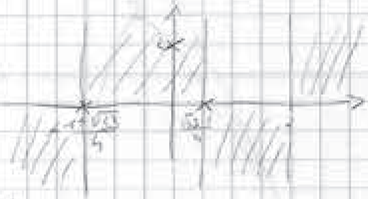
$2x^2+x-4>0$

$2x^2+x-4=0$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+32}}{4} = \frac{-1\pm\sqrt{33}}{4} \begin{cases} -\frac{1+\sqrt{33}}{4} \\ \frac{-1+\sqrt{33}}{4} \end{cases}$

$2x^2+x-4>0$ per $x<-\frac{1+\sqrt{33}}{4}$ et $x>\frac{-1+\sqrt{33}}{4}$

$\frac{1}{2}x-1>0$ per $x>2$



I punti d'incontro con l'asse x sono:

$A(-\frac{1+\sqrt{33}}{4}, 0)$ e $B(\frac{\sqrt{33}-1}{4}, 0)$

Il punto d'incontro con l'asse y è

$C(0,2)$

Studio dell'andamento della funzione:

$$y'=\frac{(2x+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}x-1)-\frac{1}{2}(x^2+\frac{1}{2}x-2)}{(\frac{1}{2}x-1)^2}=\frac{x^2-2x+\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x+1}{(\frac{1}{2}x-1)^2}=\frac{\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2}x-1)^2}$$

$$\frac{\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2}x-1)^2}\geq 0$$

$\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}\geq 0$

$x^2-4x+1\geq 0$

$x=2\pm\sqrt{4-1}=2\pm\sqrt{3} \begin{cases} 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} \end{cases}$

$y'>0$ per $x<2-\sqrt{3}$ et $x>2+\sqrt{3}$

per $x<2-\sqrt{3}$ la funzione cresce

per $2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$ la funzione decresce

per $x>2+\sqrt{3}$ la funzione cresce.

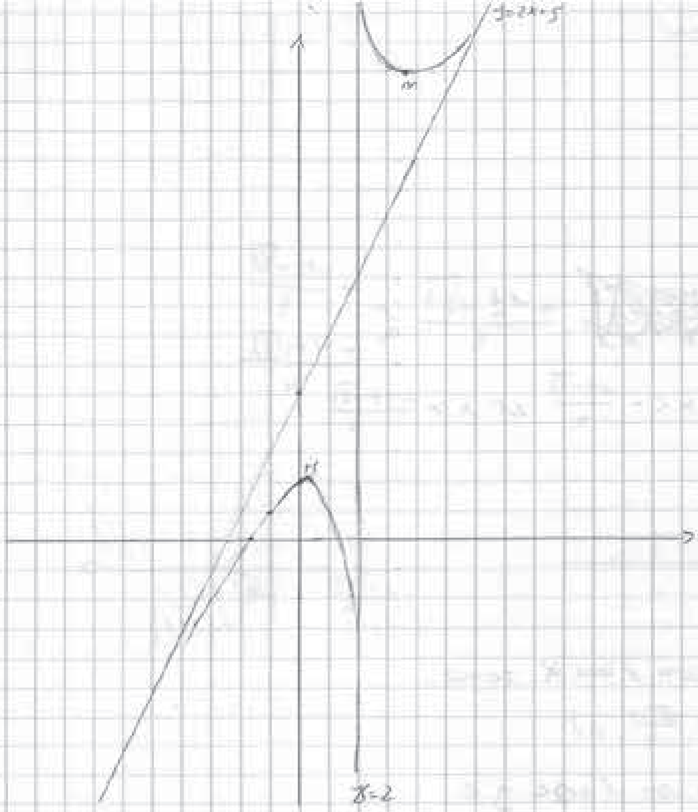
Quindi:

per $x=2-\sqrt{3}$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f(2-\sqrt{3})=4\sqrt{3}-9$

per $x=2+\sqrt{3}$ la funzione ha un minimo il cui valore è

$f(2+\sqrt{3})=4\sqrt{3}+9$



VI :

$$\begin{cases} y = kx \\ y = \dfrac{x^2+mx-2}{mx-1} \end{cases}$$

$$\frac{x^2+mx-2}{mx-1} = kx$$

$$x^2+mx-2 = mkx^2-kx$$

$$(mk-1)x^2-(m+k)x+2=0.$$

V :

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2+mx-2}{mx-1} \\ y = \dfrac{x^2+kx-2}{kx-1} \end{cases}$$

$$(x^2+mx-2)(kx-1) = (x^2+kx-2)(mx-1)$$

$$kx^3-\cancel{x^2}+\cancel{kmx^2}-mx+\cancel{2}-2kx = mx^3+\cancel{kmx^2}-2mx-\cancel{x^2}-kx+\cancel{2}$$

$$kx^3-mx^3+mx-kx=0$$

$$(k-m)x^3-(k-m)x=0$$

$$x^3-x=0$$

$$x(x^2-1)=0$$

$$x=0 \Rightarrow y=2$$

$$x^2-1=0 \Rightarrow x_1=1 \text{ et } y=1\ ;\ x_2=-1 \text{ et } y=1$$

Dunque i punti fissi sono 3 e precisamente:

$A(0,2)$; $B(-1,1)$, $C(1,1)$.

28 Esercizio. Studiare la seguente funzione

$y = 3\,\text{sen}\,x - \sqrt{3}\cos x$ è trascendente periodica con periodo 2π.

$D = \mathbb{R}$ $[0, 2\pi]$

$f(0) = -\sqrt{3}$

$f(2\pi) = -\sqrt{3}$

Segno della funzione

~~$3\,\text{sen}\,x - \sqrt{3}\cos x = 0$~~

$\boxed{\text{IV}}$ applico le formule parametriche, posto $tg\frac{x}{2} = t$

$$y = \frac{6t}{1+t^2} - \frac{\sqrt{3}(1-t^2)}{1+t^2}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}\,t^2 + 6t - \sqrt{3}}{1+t^2}$$

calcolo gli zeri del numeratore:

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{3+3}}{\sqrt{3}} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{3} \pm 6}{3} = -\sqrt{3} \pm 2$$

per $t < -\sqrt{3} - 2$ $y > 0$

per $-\sqrt{3} - 2 < t < -\sqrt{3} + 2$ $y < 0$

per $t > -\sqrt{3} + 2$ $y > 0$

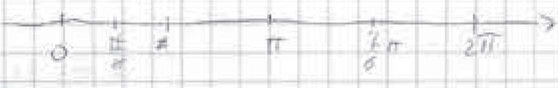
per $t = -\sqrt{3} - 2$ $y = 0$

per $t = -\sqrt{3} + 2$ $y = 0$

$2 + \sqrt{3} = 75° = \frac{5}{12}\pi$

$2 - \sqrt{3} = 15° = \frac{1}{12}$

$tg\frac{x}{2} < -\sqrt{3} - 2$	$tg\frac{x}{2} = -\sqrt{3} - 2$	$-\sqrt{3} - 2 < tg\frac{x}{2} < 2 - \sqrt{3}$	$tg\frac{x}{2} = 2 - \sqrt{3}$	~~$tg\frac{x}{2} > 2 - \sqrt{3}$~~
$\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{7}{12}\pi$	$\frac{x}{2} < \frac{7}{12}\pi$, $\frac{13}{12}\pi$	$\frac{7}{12}\pi < \frac{x}{2} < \frac{1}{12}\pi$		$\frac{1}{12}\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ et
$\pi < x < \frac{7}{6}\pi$	$x < \frac{7}{6}\pi$, $\frac{13}{6}\pi$	$\frac{7}{6}\pi < x < \frac{\pi}{6}$		$\frac{13}{12}\pi < \frac{x}{2} < \frac{1}{4}\pi$
				$\frac{\pi}{6} < x < \pi$



$y = 0$ per $x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{7}{6}\pi$

$y' = 3\cos x + \sqrt{3}\,\text{sen}\,x$

$3 + \sqrt{3}\,tg\,x = 0$

$tg\,x = -\sqrt{3}$ per $x = \frac{2}{3}\pi$ et $x = \frac{5}{3}\pi$

$y'' = -3\,\text{sen}\,x + \sqrt{3}\cos x$

$y''_{x=\frac{2}{3}\pi} = -\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{4}\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$ max.

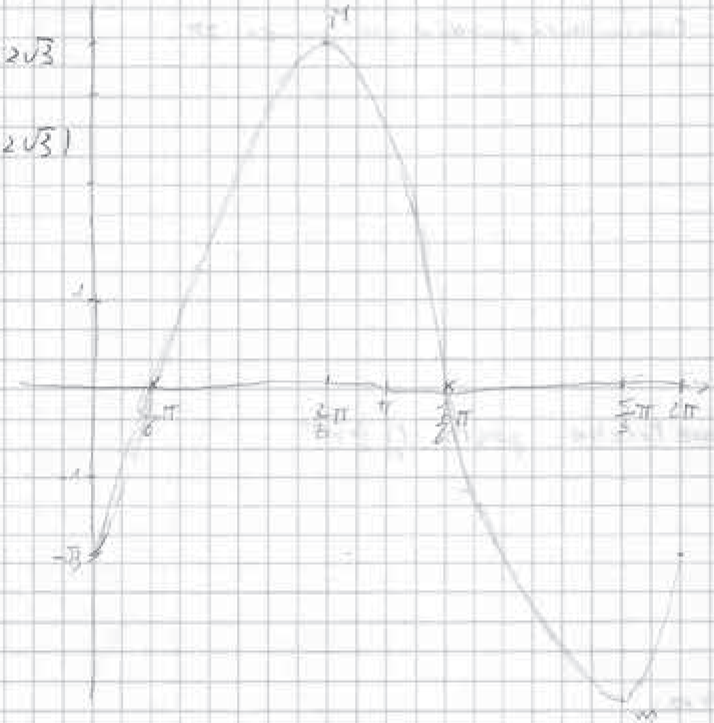
$f\left(t \cdot \frac{2}{3}\pi\right) =$

$M\left(\frac{2}{3}\pi, 2\sqrt{3}\right)$

$y''_{x=\frac{5}{3}\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} > 0 \quad$ min

$f\left(\frac{5}{3}\pi\right) = -2\sqrt{3}$

$m\left(\frac{5}{3}\pi, -2\sqrt{3}\right)$



$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7}{6}\pi} (3 \sin x - \sqrt{3} \cos x)\, dx = \left[-3\cos x - \sqrt{3} \sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7}{6}\pi} = \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

Es n: 64 pag 775

$\lim_{x\to 1} \frac{\lg x}{x-1}$

$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$

$\lim_{x\to 1} \frac{\lg x}{x-1} = 1$

Es n: 68 pag 775

$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^5 - 1}{x} = 5$

$\lim_{x\to 0} 5(x+1)^4 = 5$

Es n: 67 pag 775

$\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x^4 - 2x^3 + x^2} = 2$

$\lim_{x\to 1} \frac{4x^3 - 6x^2 + 4x - 2}{4x^3 - 6x^2 + 2x} = 2$

$\lim_{x\to 1} \frac{12x^2 - 12x + 4}{12x^2 - 12x + 2} = \frac{4}{2} = 2$

Esercizio

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

Es n: 32 pag 780

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x}{x} = 2$

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x + 1}{1} = 2$

Es n: 36 pag 780

$\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 10x + 25}$

$\lim_{x\to 5} \frac{2x - 3}{2x - 10} = \infty$

Es n: 31 pag 780

$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$

Esercizio

$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{2 \sin x \cos x}{2x} = \lim_{x\to 0} \cos x \frac{\sin x}{x} = 1$

Esercizio

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} = \frac{5}{2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{5 \cos 5x}{2 \cos 2x} = \frac{5}{2}$

N.B.:

$\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}}$

55 Controesempio del teorema di De L'Hospital

$$f(x) \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = \frac{0}{0}$$

(si dimostra che il prodotto fra una f. che tende a zero e una che è oscillante in modo limitato è zero.)

Applico il teorema di De L'Hopital

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x \cdot \sin\frac{1}{x} + x^2 \cdot -\frac{1}{x^2} \cos\frac{1}{x^2}}{1} = \lim_{x\to 0} \left(2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) \cdot 1^{-1} \text{ non esiste}$$

$$\lim_{x\to 0} 2x \sin\frac{1}{x} = 0$$

$\lim_{x\to 0} -\cos\frac{1}{x}$ non esiste perché oscillante fra -1 e 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

Dimostrazione teorema di De L'Hospital

$\exists f'(x); \varphi'(x) \ \forall x \in H - \{c\}$

Ip: $\lim_{x\to c} f(x) = f(c) = 0$; $\lim_{x\to c} \varphi(x) = \varphi(c) = 0$; $\varphi'(x) \neq 0$ ovunque in H_c; $\exists \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$

$f(x)$, $\varphi(x)$, H_c

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Applico il teorema di Cauchy, rispetto all'intervallo c, x alle 2 funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$

$$\frac{f(x) - f(c)}{\varphi(x) - \varphi(c)} = \frac{f'(z)}{\varphi'(z)} \quad (1)$$

$c < z < x$ opp. $x < z < c$ a seconda che x sia $>$ o $<$ di c.

Ma per ip. è $f(c) = 0$, $\varphi(c) = 0$ e la (1) diventa

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(z)}{\varphi'(z)} \quad (2)$$

$\lim_{x\to c} z = c$ per il teorema del confronto ($\lim_{x\to c} c = c$, $\lim_{x\to c} x = c$)

$$\lim_{z\to c} \frac{f'(z)}{\varphi'(z)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(z)}{\varphi'(z)}$$ $\exists$ per ipotesi

Ma allora per la (2):

$\exists \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ e si ha:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{\cos x} = 0$ ~~l'infinitesimo~~

Allora $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x}$ => x^2 è un infinitesimo di ordine superiore a sen x.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{sen} x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos x} = +\infty$

Allora $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{sen} x} = +\infty$ $\sqrt{x}$ è di ordine inferiore di sen x.

Dati più infinitesimi consideriamo uno di essi, ad es. α, e lo scegliamo come inf. fondamentale. Allora tutti gli infinitesimi che hanno lo stesso ordine di α si dicono del I ordine.
Un infinitesimo si dirà di ordine n se è dello stesso ordine dell'infinitesimo α^n

Ex:

Le funzioni $1-\cos x$; sen x; x; $tg^2 x$ sono tutte infinitesimi con $x\to 0$.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$ $1-\cos x$ ordine sup. di x

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} \neq 0$ $1-\cos x$ è dell II ordine.

Supponiamo che f(x) sia un infinitesimo per $x\to c$; cioè:
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$
e che assunto x−c come inf. fondamentale, ammettiamo che f(x) sia del primo ordine, cioè:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{x-c} = l \neq 0$$

La variabile $\varepsilon = \frac{f(x)}{x-c} - l$ è un infinitesimo per $x\to c$. Infatti:

$\lim\limits_{x\to c} \varepsilon = \lim\limits_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{x-c} - l\right) = \lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{x-c} - l = l-l=0$

$\frac{f(x)}{x-c} - l = \varepsilon$

$f(x) = (l+\varepsilon)(x-c)$

$f(x) = l(x-c) + \varepsilon(x-c)$

Le due espressioni $l(x-c)$ ed $\varepsilon(x-c)$ sono due infinitesimi.
L'infinitesimo $l(x-c)$ è dello stesso ordine di $f(x)$ mentre $\varepsilon(x-c)$

... è di ordine superiore a $f(x)$. Difatti:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{l(x-c)} = \frac{1}{l} \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{x-c} = \frac{1}{l} \cdot l = 1 \neq 0$$

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{\varepsilon(x-c)} = \lim_{x\to c} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \lim \frac{f(x)}{x-c} = \infty \cdot l = \infty$$

Quando un infinitesimo viene, compare nella somma di un infinitesimo

$\sin 5x$ è infinitesimo con x

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x\to 0} 5\cos 5x = 5$$

$$\frac{\sin 5x}{x} - 5 = \varepsilon$$

$$\sin 5x = 5x + \varepsilon x$$

$5x$ è la parte principale dell'infinitesimo $\sin 5x$

Principio di sostituzione degli infinitesimi:
il lim del rapporto di due infinitesimi è uguale al rapporto delle loro parti principali

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x-c} = f'(c) \neq 0$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(c)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(c) = \varepsilon$$

$$\Delta y = f'(c) \cdot \Delta x + \varepsilon \Delta x$$

$f'(c) \cdot \Delta x$ è la parte principale dell'infinitesimo Δy, viene detta differenziale della funzione $f(x)$ nel punto c e si indica con:

$$d f(x) \text{ oppure } dy.$$

Dunque abbiamo

$$dy = f'(c) \cdot \Delta x \quad (1)$$

$$y = x$$

$$dy = 1 \cdot \Delta x = dx$$

La (1) può essere scritta

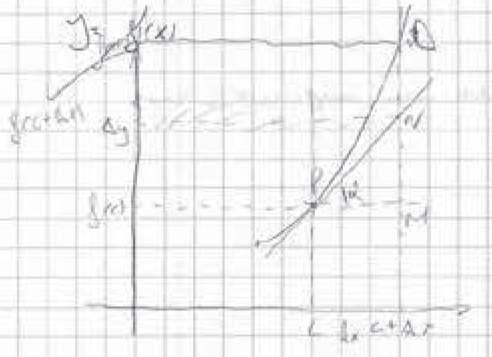
$$dy = f'(c) \cdot dx$$

e più in generale

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

$d \sin x = \cos x \cdot dx$

$d \lg x = \frac{1}{x} dx$



$\Delta y = MN + ND$

$MN = \Delta x \cdot tg\,\alpha$

$\Delta y = \Delta x \; tg\,\alpha + ND$

$\Delta y = \Delta x \cdot m + ND$

$\Delta y = \Delta x \; f'(c) + ND$

se $y = mx + n$ è l'eq. della tg alla curva nel punto P, allora si ha:

$m = tg\,\alpha$ ma si ha anche:

$m = f'(c)$

$tg\,\alpha = f'(c)$

$MQ = MN + NQ$

$MQ = PM \; tg\,\alpha + NQ$

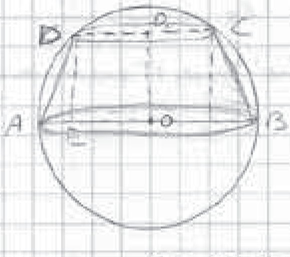
$MQ = \Delta x f'(c) \cdot \Delta x + NQ$

$\Delta y = f'(c)\,\Delta x + NQ$

$\Delta y = dy + NQ$

12' Es n. 193 pag 297

Inscrivere in una sfera di raggio 2 un tronco di cono avente per base un cerchio massimo e di superficie laterale massima.



Dette C e C_1 le circonferenze di base si ha che l'area laterale è:

$A_{lat} = (C_1 + C)\cdot$ apotema.

pongo

$\overline{DO_1} = x \qquad 0<x<2$

$C_1 = 2\pi x;\quad C = 2\pi 2$

$\overline{AE} = 2-x$

$\overline{ED} = \sqrt{2^2-x^2}$

$\overline{AD} = \sqrt{r^2-2rx+x^2+r^2-x^2} = \sqrt{2r^2-2rx}$

$A_{lat} = (2\pi x+2\pi r)\sqrt{2r^2-2rx}$

$z = (x+r)\sqrt{2r^2-2rx}$

$z' = \sqrt{2r^2-2rx} + (x+r)\dfrac{1}{2\sqrt{2r^2-2rx}}\cdot -2r$

$z' = \sqrt{2r^2-2rx} - \dfrac{r(x+r)}{\sqrt{2r^2-2rx}} = \dfrac{2r^2-2rx-rx-r^2}{\sqrt{2r^2-2rx}} = \dfrac{r^2-3rx}{\sqrt{2r^2-2rx}} = 0$

$r^2-3rx=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}r$

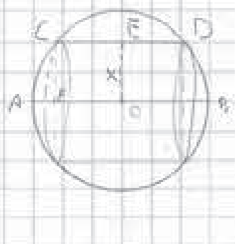
$z'' = \dfrac{-3r + (3rx-r^2)\cdot\dfrac{-2r}{2\sqrt{2r^2-2rx}}}{2r^2-2rx}$

$z''_{x=\frac{1}{3}r} = \dfrac{-3r}{2r^2-\frac{2}{3}r^2} = \dfrac{-3r}{\frac{4}{3}r^2} = \dfrac{-3}{\frac{4}{3}r} < 0$

per $x=\frac{1}{3}r$ si ha il tronco di cono richiesto

Es n. 135 pag 238

In un cerchio di centro O e raggio r condurre una corda CD in modo che ruotando attorno al diametro AB ad essa parallelo, sia massima la superficie generata.



$\overline{EO} = x \qquad 0<x<2r$

$EC = \sqrt{r^2-x^2}$

$CD = 2\sqrt{r^2-x^2} = r\sqrt{2}$ per $x=\frac{1}{2}r\sqrt{2}$

$CF = x$

$A_L = 4\pi x\sqrt{r^2-x^2}$

$z = x\sqrt{r^2-x^2}$

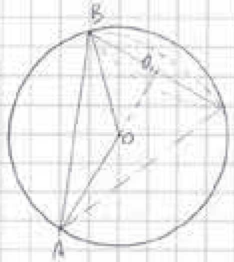
$z' = \sqrt{r^2-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{r^2-x^2}} = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}r\sqrt{2}$

$z'' = \dfrac{-4x\sqrt{r^2-x^2} + (2x^2-r^2)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}}\cdot -2x}{r^2-x^2}$

$z''_{x=\frac{1}{2}r\sqrt{2}} = \dfrac{-2r\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}r\sqrt{2}}{\frac{1}{2}r^2} = \dfrac{-r^2}{\frac{1}{2}r^2} = -2<0$ per $x=\frac{1}{2}r\sqrt{2}$ si ha la corda richiesta.

Es n: 133 pag 758

Si consideri un cerchio di centro O e raggio r e sia A un punto della circonferenza. Sia inoltre OB un raggio mobile che forma l'angolo 2x con OA. Facendo ruotare la figura attorno ad OA, il segmento AB genera la superficie laterale di un cono. Come deve essere scelto x perché quest'area sia minima. In quale ipotesi costruire il punto B.



$A\hat{O}B = 2x$

$B\hat{O}O_1 = \pi - 2x \;;\; O\hat{B}O_1 = \frac{\pi}{2} - 2x$

$\overline{O_1B} = r\,\text{sen}(\pi - 2x) = \cancel{2r\,\text{sen}x\cos x}\ 2r = \cancel{\ } = 2r\,\text{sen}x\cos x$

$\overline{OO_1} = r\cos(\pi - 2x) = \cancel{\ } = -r\cos 2x = -2r\cos^2 x + r$

$\overline{AO_1} = \overline{AO} + \overline{OO_1} = r - 2r\cos^2 x + r = 2r - 2r\cos^2 x$

$\overline{AB} = \sqrt{4r^2 - 8r^2\cos^2 x + 4r^2\cos^4 x + 4r^2\,\text{sen}^2 x\cos^2 x} =$

$= \sqrt{4r^2 - 8r^2\cos^2 x + \cancel{4r^2\cos^4 x} + 4r^2\cos^2 x - \cancel{4r^2\cos^4 x}} = \sqrt{-4r^2\cos^2 x + 4r^2} =$

$2r\sqrt{1-\cos^2 x}$

$A_{lat} = 2\pi \cdot 2r\,\text{sen}x\cos x \cdot 2r\sqrt{1-\cos^2 x} = 8\pi r^2\,\text{sen}x\cos x\cdot\text{sen}x = 8\pi r^2\cdot\text{sen}^2 x\cos x.$

$z = r^2\,\text{sen}^2 x\cos x = r^2\cos x(1-\cos^2 x) = r^2\cos x - r^2\cos^3 x = r^2(\cos x - \cos^3 x).$

$z' = r^2\cdot(-\text{sen}x + 3\cos^2 x\,\text{sen}x) = 0$

$+3\,\text{sen}x\cos^2 x - \text{sen}x = 0$

$\text{sen}x\,(3\cos^2 x - 1) = 0$

$\text{sen}x = 0 \Rightarrow x = 0$

$3\cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$z'' = r^2\cdot(-\cos x + 3\cdot 2\cos x\cdot(-\text{sen}x)\cdot\text{sen}x + 3\cos^2 x\cdot\cos x) =$

$= r^2\cdot(-\cos x - 6\,\text{sen}^2 x\cos x + 3\cos^3 x).$

$z''_0 = 2 > 0$ min.

$z''_{\frac{1}{3}\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3} - \text{sen}^2 x\cdot 2\sqrt{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3} = -2\sqrt{3}\,\text{sen}^2 x < 0$

per $\cos x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ si ha il cono richiesto.

102 **Esercizio**: calcolare l'area della circonferenza con il centro nell'origine. **Es n: 27 pag 757**

$x^2+y^2=r^2$

$y=\pm\sqrt{r^2-x^2} < \begin{matrix} y=\sqrt{r^2-x^2} \\ y=-\sqrt{r^2-x^2} \end{matrix}$

$\frac{A}{4}=\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$

$\int \sqrt{r^2-x^2}\,dx$

pongo

$x=r\cos t \Rightarrow \cos t=\frac{x}{r} \Rightarrow t=\arccos\frac{x}{r}$

$dx=-r\,\mathrm{sen}\,t\,dt$

$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\int\sqrt{a^2-a^2\cos^2 t}\;a\,\mathrm{sen}\,t\,dt=-a^2\int \mathrm{sen}^2 t\,dt=-a^2\left(-\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,t\cos t+\frac{1}{2}t\right)+c=$

$\frac{1}{2}a^2(\mathrm{sen}\,t\cos t-t)+c=\frac{1}{2}a^2\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot\frac{x}{a}-\arccos\frac{x}{a}\right)+c$

$F(x)=\frac{1}{2}a^2\left(\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}-\arccos\frac{x}{a}\right)$

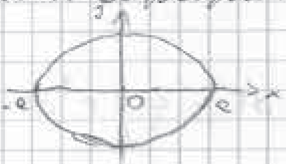
$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=F(a)-F(0)=0+\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{4}\pi a^2$

$\frac{A}{4}=\frac{1}{4}\pi a^2$

$A=\pi a^2$

Esercizio: calcolare l'area dell'ellisse riferita ai propri assi:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

$\frac{A}{4}=\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

pongo

$x=a\cos t \Rightarrow t=\arccos\frac{x}{a}$

$dx=-a\,\mathrm{sen}\,t\,dt$

$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-a^2\int\mathrm{sen}^2 t\,dt=-a^2\left(-\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,t\cos t+\frac{1}{2}t\right)+c=$

$\frac{1}{2}a^2(\mathrm{sen}\,t\cos t-t)+c=\frac{1}{2}a^2\left(\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2}}\cdot\frac{x}{a}-\arccos\frac{x}{a}\right)+c$

$F(x)=\frac{1}{2}a^2\left(\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}-\arccos\frac{x}{a}\right)$

$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}=F(a)-F(0)=0+\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{4}\pi a^2$

$\frac{A}{4}=\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{4}\pi a^2=\frac{1\pi ab}{4}$

$A=\pi ab$

Es n. 154 pag 228

$$\int x\sqrt{5+x^2}\,dx$$

pongo

$t = 5+x^2$

$dt = 2x\,dx$

$x\,dx = \frac{1}{2}\,dt$

$$\int x\sqrt{5+x^2}\,dx = \int \frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{t^3} + c = \frac{1}{3}\sqrt{(5+x^2)^3} + c.$$

Es n. 152 pag 228

$$\int \sqrt{2+x}\,dx$$

pongo $2+x = t \Rightarrow x = t-2$

$dx = 1\cdot dt$

$$\int \sqrt{2+x}\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(2+x)^3} + c$$

Es n. 153 pag 228

$$\int \sqrt[4]{2+3x}\,dx$$

pongo $2+3x = t$

$dt = 3dx$

$dx = \frac{1}{3}dt$

$$\int \sqrt[4]{2+3x}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt[4]{t}\,dt = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{4}}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}} + c = \frac{4}{15}\sqrt[4]{t^5} + c = \frac{1}{15}\sqrt[4]{(2+3x)^5} + c.$$

103 Es n°13 pag 853

In un piano, nel quale è fissato un sistema cartesiano ortogonale Oxy, sono dati i punti $A(0,1)$ e $B(5,0)$. Si determini sull'asse x un punto C tale che risulti:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}.$$ Discussione

Successivamente si generalizzi la questione supponendo che il predetto rapporto sia uguale ad un numero positivo assegnato K. Ottenuta l'equazione in x che risolve il problema, si ponga $x = X$, $K^2 = y$; si esprima y in funzione di X e si studi l'andamento della funzione $y(X)$, distinguendo i casi $B \gtreqless 1$. Infine si utilizzi il grafico di tal funzione per determinare i valori di X corrispondenti ad un assegnato valore di K.

$A(0,1)$ $B(5,0)$ $C(x,0)$

$BC = 5 - x$

$AC = \sqrt{x^2+1}$

$$\frac{5-x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{4}{3}$$

104

$$\int \frac{1-\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}\,dx$$

pongo $1+x = t^6 \Rightarrow t = \sqrt[6]{1+x}$

$x = t^6 - 1$

$dx = 6t^5\,dt$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1-t^2}{t^3+t^2}\cdot 6t^5\,dt = \int \frac{1-t^2}{t+1}\cdot 6t^3\,dt = 6\int (1-t)t^3\,dt = 6\int (t^3 - t^4)\,dt =$$

$$= 6\int t^3\,dt - 6\int t^4\,dt = \frac{3}{2}t^4 - \frac{6}{5}t^5 + c = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+x)^2} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{(1+x)^5} + c.$$

I coefficienti binomiali

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0}$$

Per definizione pongo

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n}a^0 b^n.$$

$n \in \mathbb{N}$

Ex

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3b^0 + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 + \binom{3}{3}a^0b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5b^0 + \binom{5}{1}a^4b^1 + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}a^1b^4 + \binom{5}{5}a^0b^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$(a+b)^0$ $\quad 1$

$(a+b)^1$ $\quad \binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$

$(a+b)^2$ $\quad \binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$

$(a+b)^3$ $\quad \binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$

$(a+b)^4$ $\quad \binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$

$(a+b)^5$ $\quad \binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

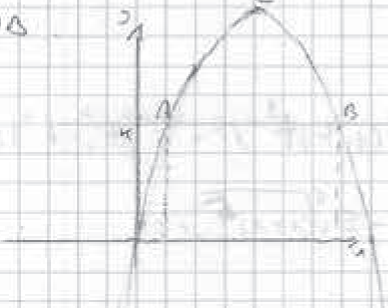
Triangolo aritmetico di Tartaglia

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$(2x^5 - xy^7)^6 = 64x^{30} - 192x^{25}y^7 + 240x^{22}y^{14} - 160x^{12}y^{21} + 60x^{14}y^{28} - 12x^{10}y^{35} + x^6y^{42}.$$

Es n=133 pag 781

Data la parabola $y=-x^2+4x$, condurre, nel semipiano delle ordinate positive, una retta parallela all'asse delle x in modo che, indicati con A e B i suoi punti di intersezione con la curva, sia massima l'area del triangolo OAB



$y=k \quad 0\le k\le 4$

$C\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$

$\begin{cases}y=k\\y=-x^2+4x\end{cases}$

$x=2\pm\sqrt{4-k} < \begin{matrix}2-\sqrt{4-k}\\2+\sqrt{4-k}\end{matrix}$

$h=k$

$b=2\sqrt{4-k}$

$A_{triang}=\frac{1}{2}k\cdot 2\sqrt{4-k}=k\sqrt{4-k} \qquad f(0)=0 \quad f(4)=0$

$z=k\sqrt{4-k}$

$z'=\sqrt{4-k}-\frac{k}{2\sqrt{4-k}}=\frac{8-2k-k}{2\sqrt{4-k}}=0$

$8-3k=0$

$k=\frac{8}{3}$

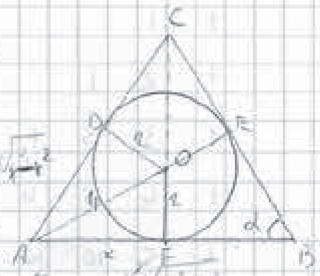
$z''=\frac{-6\sqrt{4-k}+(3k-8)\cdot\frac{1}{4\sqrt{4-k}}\cdot -1}{4(4-k)}$

$z''_{\frac{8}{3}}<0$ per $k=\frac{8}{3}$ si ha la retta richiesta, l'eq è:

$y=\frac{8}{3}$

Es n 153 pag 783

Fra tutti i triangoli isosceli circoscritti ad una circonferenza di raggio r, trovare quello di area minima.



$CO=x \quad x>r$

$CE=\sqrt{x^2-r^2}$

$CF=x+r$

$FB: r=(x+r):\sqrt{x^2-r^2}$

$FB=\frac{r(x+r)}{\sqrt{x^2-r^2}}=A$

$A=\frac{r(x+r)^2}{\sqrt{x^2-r^2}}=\frac{r(x+r)\sqrt{x^2-r^2}}{(x+r)(x-r)}$

$A=r\sqrt{\frac{(x+r)^2(x^2-r^2)}{(x-r)^2}}=r\sqrt{\frac{(x+r)^2(x+r)(x-r)}{(x-r)^2}}$

$A=r\sqrt{\frac{(x+r)^3}{x-r}}$; $z=\frac{(x+r)^3}{x-r}$

$z'=\frac{(x+r)^2(2x-4r)}{(x-r)^2}$

$z'=0$ se $x=-r$ non acc.; $x=2r$

$\alpha=60°$

$\overline{AF}=x \quad x>0$

$\overline{AO}=\sqrt{r^2+x^2}$

$AE=h=r+\sqrt{r^2+x^2}$

$A_{tri}=\frac{1}{2}2x\left(r+\sqrt{r^2+x^2}\right)=x\left(r+\sqrt{r^2+x^2}\right)$

$z=rx+x\sqrt{r^2+x^2}$

$z'=r+\sqrt{r^2+x^2}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{r^2+x^2}}\cdot 2x$

$z'=r+\sqrt{r^2+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{r^2+x^2}}=0$

$r\sqrt{r^2+x^2}+r^2+x^2+x^2=0$

$r\sqrt{r^2+x^2}=-2x^2-r^2$

$r^4+r^2x^2=4x^4+4r^2x^2+r^4$

10b

$4x^4 + 3\ell^2x^2 = 0$

$4x^2 + 3\ell^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\ell\sqrt{3}$

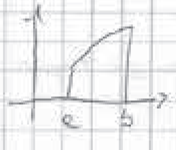
$z' = \frac{x}{\sqrt{\ell^2+x^2}} + \frac{2x\sqrt{\ell^2+x^2} - x^2 \cdot \frac{x}{\sqrt{\ell^2+x^2}}}{\ell^2+x^2}$ caso in cui il triangolo circoscritto è equilatero

in $x = \frac{1}{2}\ell\sqrt{3}$ si ha il triangolo minimo. Lo so sempre dove cade:

$\ell\sqrt{3}$

~~[illegible]~~ Solidi di rotazione

$y = f(x)$

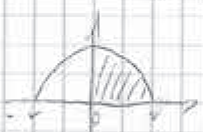


$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

$x^2 + y^2 = r^2$

$y^2 = \pm\sqrt{r^2-x^2}$

$y = \sqrt{r^2-x^2}$



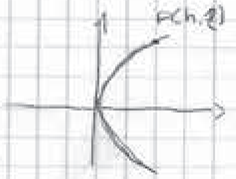
$$V = 2\pi\int_0^r \left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx$$

$\int (r^2-x^2)\,dx = r^2x - \frac{1}{3}x^3 + c$

$F(x) = r^2x - \frac{1}{3}x^3$

$$V = 2\pi\int_0^r (r^2-x^2)\,dx = 2\pi[F(r) - F(0)] = 2\pi\left(r^3 - \frac{1}{3}r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$x = ay^2$



$h = a\ell^2$

$a = \frac{h}{\ell^2}$

$x = \frac{h}{\ell^2}y^2$

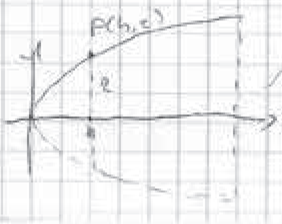
$$V = \pi\int_0^h \left(\ell\sqrt{\frac{x}{h}}\right)^2 dx = \pi\ell^2\int_0^h \frac{x}{h}\,dx = \pi\frac{\ell^2}{h}\cdot\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^h =$$

$$= \frac{\pi\ell^2}{h}\cdot\frac{1}{2}h^2 = \frac{1}{2}\pi h\ell^2$$

$y = \pm\sqrt{\frac{\ell^2x}{h}}$

$y = \pm\ell\sqrt{\frac{x}{h}}$

$y = \ell\sqrt{\frac{x}{h}}$

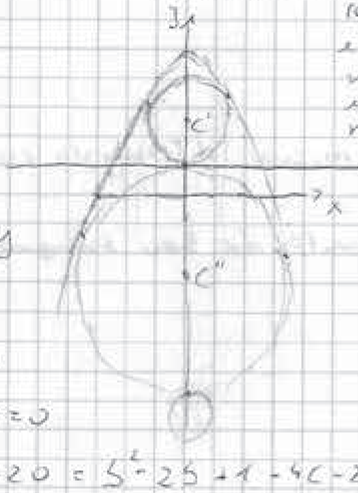


<u>Es n: 25 pag 858</u>

- $y = 5 - x^2$

  $y = 1$

Quesito 1: Si scrivano le equazioni delle due circonferenze C' e C'' tangenti alla parabola di equazione $y = 5 - x^2$ e alla retta di equazione $y = 1$, e aventi i centri sull'asse della parabola. Si indichino con r' e r'' ($r' > r''$) i rispettivi raggi di C' e C''. Dopo aver determinato r' e r'' si trovi l'equazione della circonferenza C''' avente il centro sullo stesso asse degli altri due cerchi, tangente a C'' e raggio uguale a r'. Inoltre si trovi l'equazione della parabola tangente a C' e C''' e si calcoli l'area della regione del piano limitata dalle due parabole.



$$\begin{cases} x^2 + y^2 + by + c = 0 \\ y = 5 - x^2 \Rightarrow x^2 = 5 - y \end{cases}$$

$$5 - y + y^2 + by + c = 0$$

$$y^2 + (b-1)y + c + 5 = 0$$

$$\Delta = (b-1)^2 - 4c - 20 = b^2 - 2b + 1 - 4c - 20 = b^2 - 2b - 19 - 4c = 0$$

$$c = \frac{b^2 - 2b - 19}{4}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + by + \frac{b^2 - 2b - 19}{4} = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$ eq. del fascio di circonferenze col centro sull'asse y e tangenti alla parabola.

$$x^2 + 1 + b + \frac{b^2 - 2b - 19}{4} = 0$$

$$4x^2 + 4 + 4b + b^2 - 2b - 19 = 0$$

$$4x^2 = 15 - 2b - b^2$$

$$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{15 - 2b - b^2} = 0$$ (il centro deve essere sull'asse y)

$$15 - 2b - b^2 = 0$$

$$b^2 + 2b + 15 = 0$$

$$b = -1 \pm 4 \left< \begin{matrix} -5 \\ 3 \end{matrix} \right.$$

$x^2 + y^2 - 5y + 4 = 0$ raggio minore C''

$x^2 + y^2 + 3y - 4 = 0$ raggio maggiore. C'

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \qquad r' = \frac{1}{2}\sqrt{9 + 16} = \frac{5}{2}$$

- $$\begin{cases} x^2 + y^2 + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 5y - y^2 - 4 \end{cases}$$

$$5y - \cancel{y^2} - 4 + \cancel{y^2} + by + c = 0$$

$$(5 + b)y + c - 4 = 0$$

$$-\frac{1}{2}b = \frac{5}{2} \Rightarrow b = -5$$

$$c = 4$$

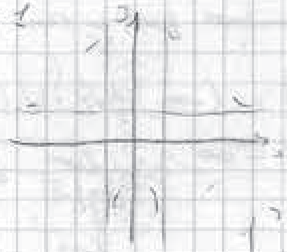
$x^2 + y^2 - 5y$ Problema indeterminato.

* Quesito 2. Si disegni il grafico della funzione: $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ e se ne determinino i punti per cui è minima la distanza dal punto $A(0,1)$ ha valore minimo.

$y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ funzione razionale fratta di II grado.

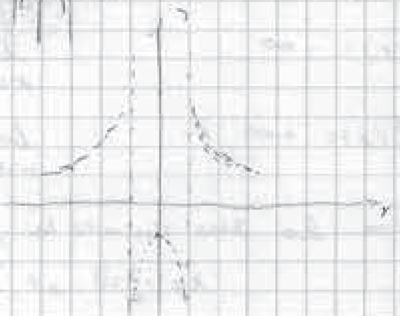
$D\ (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty) = \mathbb{R} - \{-1\} - \{1\}$

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{1}{1} = +1$ asintoto ~~verticale~~ orizzontale di eq. $y=1$



$\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ $\quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

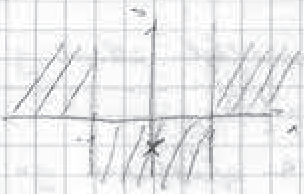


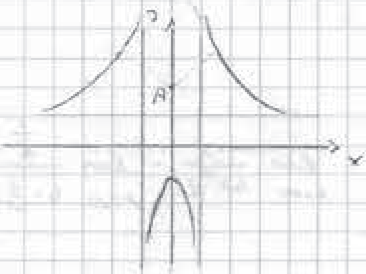
Segno della funzione e incontro con l'asse x:

$\frac{x^2+1}{x^2-1} \geq 0$

$x^2+1>0\ \forall x$

$x^2-1>0$ per $x<-1$ or $x>1$





$y' = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}$

$y'>0$ per $x<0$ $f(x)$ crescente

$y'<0$ per $x>0$ $f(x)$ decrescente

per $x=0$ $y'=0$

$f(0)=-1$ massimo relativo.

$I = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

Es n. 27 pag 859

Quesito 3: Si studi la funzione $y=\frac{x^3}{2x^2-1}$ e se ne disegni il grafico. Presi sulla curva i punti A e B rispettivamente di ascissa $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{3}$, si determinino i punti dell'arco AB nei quali la tangente alla curva è parallela alla corda AB.
Si espongono brevemente gli elementi della teoria per il calcolo degli asintoti di una curva di equazione $y=f(x)$

$y=\frac{x^3}{2x^2-1}$ funzione razionale fratta di terzo grado

$D=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right\},\left\{\frac{1}{2}\sqrt{2}\right\}=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2}\sqrt{2},+\infty\right)$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}=-\infty$ $\qquad \lim_{x\to\frac{1}{2}\sqrt{2}^-}f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to-\frac{1}{2}\sqrt{2}^-}f(x)=-\infty$ $\qquad \lim_{x\to\frac{1}{2}\sqrt{2}^+}f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to-\frac{1}{2}\sqrt{2}^+}f(x)=+\infty$ $\qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

La funzione ha due asintoti paralleli all'asse y di eq.

$x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ et $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Inoltre ha un asintoto obliquo di equazione $y=mx+n$:

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x^3-x}=\frac{1}{2}$

$m=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^3-2x^3+x}{4x^2-2}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{4x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{4-\frac{2}{x^2}}=0$

$n=0$

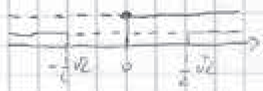
$y=\frac{1}{2}x$

Studio del segno della funzione

$\frac{x^3}{2x^2-1}\geq 0$

$x^3\geq 0$ per $x>0$

$2x^2-1>0$ per $x<-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ et $x>\frac{1}{2}\sqrt{2}$



Studio dell'andamento della funzione:

$y'=\frac{3x^2(2x^2-1)-x^3\cdot 4x}{(2x^2-1)^2}=\frac{6x^4-3x^2-4x^4}{(2x^2-1)^2}=\frac{2x^4-3x^2}{(2x^2-1)^2}\geq 0$

$2x^4-3x^2\geq 0$

$x^2(2x^2-3)\geq 0$

$x^2\geq 0\ \forall x$

$2x^2-3\geq 0$ per $x\leq-\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $x\geq\sqrt{\frac{3}{2}}$

per $x<-\sqrt{\frac{3}{2}}$ la funzione cresce

per $-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}<x<\sqrt{\frac{3}{2}}$ la funzione decresce

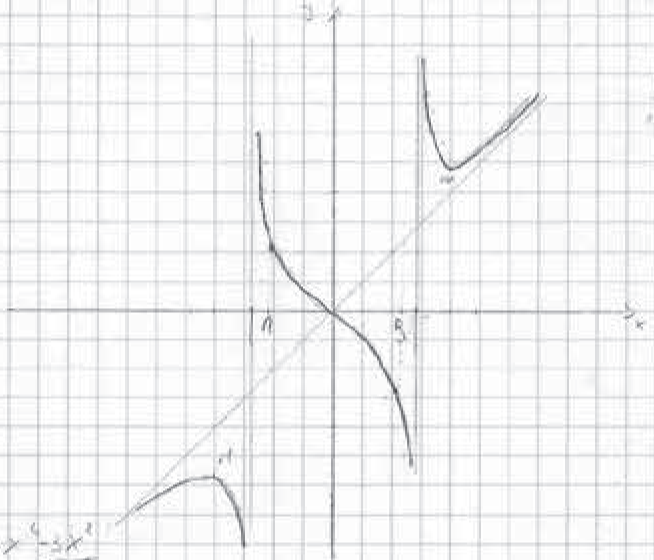
10) per $x > \sqrt{\frac{3}{2}}$ la funzione cresce

per $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f(-\sqrt{\frac{3}{2}}) =$

per $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:

$f(\sqrt{\frac{3}{2}}) =$



$y = \frac{x^3}{2x^2-1}$; $y' = \frac{2x^4-3x^2}{(2x^2-1)^2}$

$A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$$\begin{cases} y - \frac{\sqrt{3}}{3} = m\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ y + \frac{\sqrt{3}}{3} = m\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = mx + \frac{\sqrt{3}}{3}m + \frac{\sqrt{3}}{3} \\ y = mx - \frac{\sqrt{3}}{3}m - \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\cancel{mx} - \frac{\sqrt{3}}{3}m - \frac{\sqrt{3}}{3} = \cancel{mx} + \frac{\sqrt{3}}{3}m + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{3}\,m = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$m = -1$$

$y = -x$ eq. della retta passante per A e B

Consideriamo il punto generico sulla curva $P\left(a; \frac{a^3}{2a^2-1}\right)$

Il coefficiente della retta tangente alla curva nel punto P è:

$$m = \frac{2a^4-3a^2}{(2a^2-1)^2}$$

$\frac{2a^4-3a^2}{(2a^2-1)^2} = -1$ condizione di parallelismo con la retta $y = -x$

$$2a^4 - 3a^2 = -(2a^2-1)^2$$

$$6a^4 - 7a^2 + 1 = 0$$

$$a^2 = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{12} \begin{cases} \frac{1}{6} \\ 1 \end{cases}$$

$$a = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$a = \pm 1$$

$P_1\left(-\frac{1}{6}\sqrt{6}; \frac{\sqrt{6}}{24}\right)$; $P_2\left(\frac{1}{6}\sqrt{6}; -\frac{\sqrt{6}}{24}\right)$; $P_3(-1; -1)$; $P_4(1; 1)$

Quesito 1: assegnata la funzione

$$y = \operatorname{sen} x + a \cos x + b \qquad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

si determinino i valori di a e b in modo che ammetta un massimo relativo $y=0$ nel punto $x = \frac{\pi}{6}$ e si disegni la curva rappresentativa della funzione ottenuta.
Condotta la retta tangente alla curva nel punto A di ascissa $x=0$ e tracciata la retta $x = \frac{\pi}{2}$, si calcoli l'area della regione piana limitata da tali rette, dalla tangente in A e dalla curva.

$y = \operatorname{sen} x + a \cos x + b$

$\forall \ [-\pi ; \pi]$

$y' = \cos x - a \operatorname{sen} x$

$y'_{x=\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} a$

$\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} a = 0$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} a \sqrt{3} + b$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} a = 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} a \sqrt{3} + b = 0 \end{cases}$$

$a = \sqrt{3}$
$b = -2$

$y = \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x - 2$ Funzione periodica con periodo 2π. Può essere studiata in un intervallo 2π, come $[-\pi ; \pi]$

$f(-\pi) = -\sqrt{3} - 2$

$f(\pi) = -\sqrt{3} - 2$

Punti d'incontro con gli assi:

$$\begin{cases} y = \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x - 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$y = \sqrt{3} - 2$

$A(0, \sqrt{3} - 2)$

$$\begin{cases} y = \operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x - 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x - 2 = 0$

Pongo $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ e applico le formule parametriche.

$\frac{2t}{1+t^2} + \sqrt{3} \frac{1-t^2}{1+t^2} - 2 = 0$

$(\sqrt{3} + 2) t^2 - 2t + 2 - \sqrt{3} = 0$

$t = \frac{1 \pm \sqrt{1+3-4}}{\sqrt{3}+2} = \frac{1}{\sqrt{3}+2} = 2 - \sqrt{3}$ due soluzioni coincidenti.

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2 - \sqrt{3} \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \\ \frac{x}{2} = 195° \Rightarrow x = 390° \text{ no.} \end{cases}$

$y' = \cos x - \sqrt{3} \operatorname{sen} x$

$\cos x - \sqrt{3} \operatorname{sen} x = 0$

$1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0$

$\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}\sqrt{3} \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = -5\pi \end{cases}$

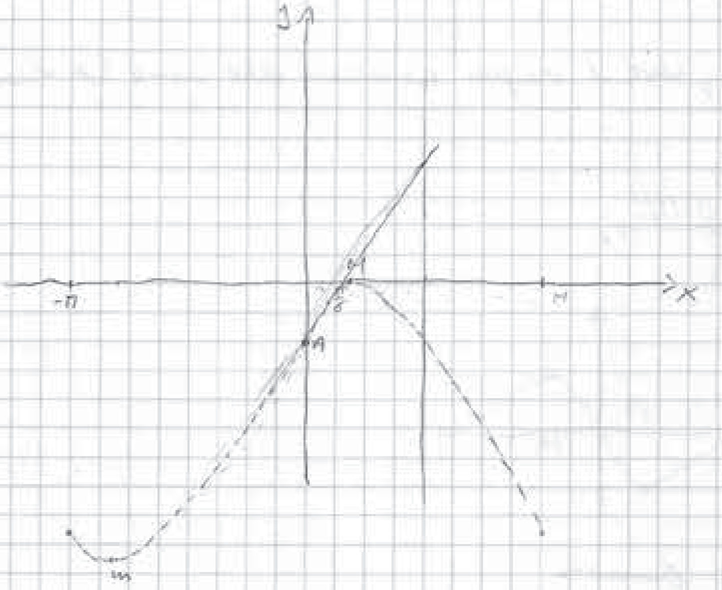
108 $y'' = -\sin x - \sqrt{3} \cos x$

$y''_{x=\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2 < 0$ per $x = \frac{\pi}{6}$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:

$f(\frac{\pi}{6}) = 0$

$y''_{x=-\frac{5}{6}\pi} =$ >0 per $x = -\frac{5}{6}\pi$ si ha un minimo relativo il cui valore è:

$f(-\frac{5}{6}\pi) =$



Esercizio: studiare la seguente funzione

$$y=\frac{x}{(x^4+1)\sqrt{x^4+1}}$$

$D=\mathbb{R}$, la curva è simmetrica rispetto all'origine del riferimento perché vero che una curva è simmetrica rispetto all'origine se:

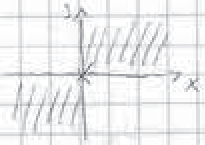
$x \to -x \Rightarrow y \to -y$

La curva passa per l'origine, cioè l'origine appartiene alla curva (e viceversa si verifica).

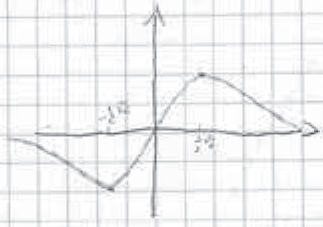
Segno della funzione:

per $x>0$ $y>0$

per $x<0$ $y<0$



[...]



Esercizio: studiare la seguente funzione:

$$y=\frac{2x^3}{(x^4+1)\sqrt{x^4+1}}$$

$D=\mathbb{R}$

La curva è simmetrica rispetto all'origine del riferimento.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3}{(x^4+1)\sqrt{x^4+1}}=\lim\frac{2x^3}{\sqrt{(x^4+1)^3}}=0$$

Segno della funzione:

per $x<0$ $y<0$

per $x>0$ $y>0$

La origine appartiene alla curva.

Studio dell'andamento

$$y'=\frac{6x^2\sqrt{(x^4+1)^3}-2x^3\cdot\frac{1}{2\sqrt{(x^4+1)^3}}\cdot 3(x^4+1)^2\cdot 4x^3}{(x^4+1)^3}=$$

$$=\frac{6x^2\sqrt{(x^4+1)^3}-\frac{12x^6(x^4+1)^2}{\sqrt{(x^4+1)^3}}}{(x^4+1)^3}=\frac{6x^2(x^4+1)^3-12x^6(x^4+1)^2}{(x^4+1)^3}=\frac{(x^4+1)^2[6x^2(x^4+1)-12x^6}{(x^4+1)^5}$$

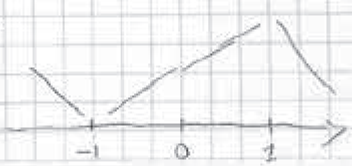
$$\frac{6x^2(x^4+1)-12x^6}{x^4+1}=\frac{6x^2(x^4+1-2x^4)}{x^4+1}=\frac{6x^2(1-x^4)}{x^4+1}=\frac{-6x^2(x^4-1)}{x^4+1}\geq 0$$

$x=0$

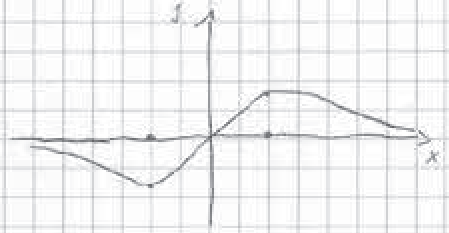
$x=\pm 1$

$-6x^2<0 \ \forall x$

$x^4-1>0$ per $x<-1$ et $x>1$



)03 per $x<-1$ la f. decresce.
per $-1<x<1$ la f cresce.
per $x>1$ la funzione decresce.
per $x=-1$ la funzione ha un minimo relativo il cui valore è:
$f(-1) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
per $x=1$ la funzione ha un massimo relativo il cui valore è:
$f(1) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$



Definizione:
Chiamasi successione una f. definita in $\mathbb{N}$ con valori in $\mathbb{R}$

$f(1) \quad f(2) \quad f(3) \quad \dots \quad f(n)$
$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_n$
$\lim a_n = \begin{cases} l & \text{convergente} \\ \infty & \text{divergente} \\ \nexists & \text{oscillante} \end{cases}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+4} = \frac{2}{3}$ successione convergente
$\lim n^2 = \infty$ successione divergente $\quad K \to \bar{n}\ \forall n > \bar{n} \Rightarrow$ valori della succ $> K$
$\lim \operatorname{sen} n = \nexists$ successione oscillante

La progressione aritmetica è una particolare successione fra cui la differenza fra un elemento e quello precedente è costante (d)

$\div \begin{cases} a_4 = 9 \\ d = 2 \\ a_{10} = x \end{cases}$

$a_n = a_m + (n-m)d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$
$a_{10} = a_4 + (10-4)\cdot 2 = 9 + 12 = 21$

$\div \begin{cases} a_{11} = 23 \\ d = 2 \\ a_5 = x \end{cases}$

$a_5 = a_{11} + (5-11)\cdot 2 = 23 - 12 = 11$

$\begin{cases} a_4 = 18 \\ a_9 = 28 \\ d \end{cases}$

$d = \frac{18-28}{4-9} = \frac{-10}{-5} = 3$

$\therefore s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

$s_5 = \frac{4+16}{2} \cdot 5 = 50$

Le progressioni geo

2 6 18 54 162 486 1458

$3 = q$

$a_n = a_m \cdot q^{n-m}$

$\therefore \begin{cases} a_2 = 6 \\ q = 3 \\ a_5 = x \end{cases}$

$a_5 = a_2 \, q^3$

$a_5 = 6 \cdot 3^3 = 162$

$\therefore \begin{cases} a_6 = 486 \\ q = 3 \\ a_2 = x \end{cases}$

$a_2 = a_6 \cdot q^{2-6} = 486 \cdot 3^{-4} = \frac{486}{81} = 6$

$\therefore P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

$P_4 = \sqrt{(2 \cdot 54)^4} = 108^2 = 11664$

$\therefore s_n = \frac{1-q^n}{1-q} \cdot a_1$

$s_5 = \frac{1-3^5}{1-3} \cdot 2 = \frac{242}{2} \cdot 2 = 242$

$\frac{7}{3}$: $7 \mid 3$, $2,333$

$\frac{7}{3} = 2,\overline{3}$

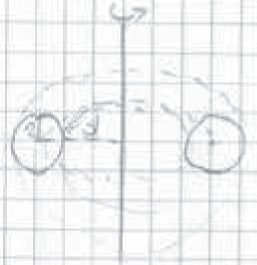
$2,\overline{3} = 2 + \underbrace{\frac{3}{10} + \frac{3}{100}} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} \dots$

$s_n = 2 + \frac{1-(\frac{1}{10})^n}{1-\frac{1}{10}} \cdot \frac{3}{10} = 2 + \left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right] \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{3}{10} = 2 + \left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right] \cdot \frac{1}{3}$

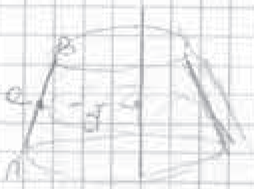
$2 + \lim_{n \to \infty} \left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right] \cdot \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

Teorema di Guldino

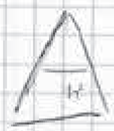
La superficie descritta da una linea l che ruota intorno ad una retta è uguale al prodotto della lunghezza della linea per la lunghezza della circonferenza descritta dal suo baricentro

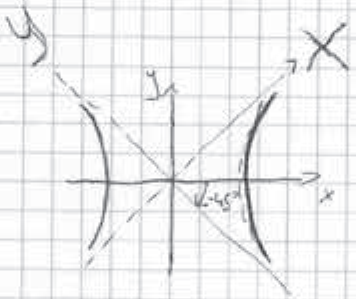


$$S = 2\pi r \, 2\pi d = 4\pi^2 r d$$
$$V = \pi r^2 \cdot 2\pi d = 2\pi^2 r^2 d$$



$$S = 2\pi d l$$
$$V = \cancel{\pi r^2 \cdot l}$$





$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha$$
$$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha$$

~~...~~ formule di rotazione

$$\alpha = -45°$$
$$x^2 - y^2 = a^2$$
$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2}X + \frac{1}{2}\sqrt{2}Y$$
$$y = -\frac{1}{2}\sqrt{2}X + \frac{1}{2}\sqrt{2}Y$$
$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}X + \frac{1}{2}\sqrt{2}Y\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}X + \frac{1}{2}\sqrt{2}Y\right)^2 = a^2$$
$$\cancel{\frac{1}{2}X^2} + \frac{2}{2}XY + \cancel{\frac{1}{2}Y^2} - \cancel{\frac{1}{2}X^2} + XY - \cancel{\frac{1}{2}Y^2} = a^2$$
$$2XY = a^2$$
$$XY = \frac{a^2}{2}$$
$$xy = k$$
$$|k| = \frac{a^2}{2}$$
$$a^2 = 2|k|$$
$$a = \sqrt{2|k|}$$
$$xy = 50$$
$$a = \sqrt{100} = 10$$

Liceo scientifico: la prova di matematica del 19.6.1986

Delle seguenti questioni il candidato risolva quelle che ritiene piu' adeguate alla sua preparazione.

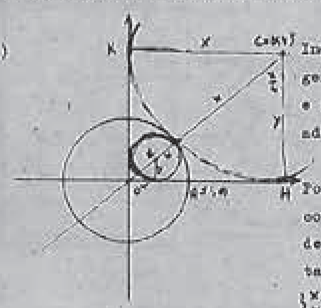
1. Sia data nel piano cartesiano la circonferenza A di raggio uno e centro nell'origine.
   Si determinino le equazioni delle circonferenze B e C appartenenti al primo quadrante, tangenti ad entrambi gli assi coordinati e alla circonferenza A e, rispettivamente, interna ed esterna ad A.
   Le circonferenze B e C e gli assi coordinati determinano tre regioni finite appartenenti al primo quadrante ed esterne a B e C.
   Si calcoli l'area complessiva delle tre regioni.

2. Si studi la funzione
   $$y = x^4 - kx^2$$
   distinguendo vari casi, a seconda dei valori assunti dal parametro reale k. In particolare, si calcoli il minimo della funzione, per ogni valore di k.
   Si disegnino i grafici corrispondenti ai valori k = -1 e k = 1.
   Il secondo grafico delimita, insieme alla retta y = 0, due regioni finite del piano, contenute rispettivamente nel terzo e nel quarto quadrante: si dimostri che l'una e' la simmetrica dell'altra rispetto alla retta x = 0 e si calcoli l'area di una di esse.

3. Verificare che la somma dei quadrati di due numeri reali di assegnato prodotto p > 0:
   a) decresce quando decresce il valore assoluto della differenza dei due numeri;
   b) raggiunge il valore minimo quando i due numeri sono uguali.
   Dedurre che, fra i rettangoli di data area, il quadrato ha la diagonale minima.

4. Sia f(x) una funzione continua nell'intervallo chiuso [-1,1].
   Indicati rispettivamente con m e M il minimo e il massimo di f(x) nell'intervallo assegnato, si dimostrino le disuguaglianze:
   $$2m \le \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx \le 2M.$$
   Si dia un esempio di funzione per la quale almeno una delle due disuguaglianze diventa un'uguaglianza, e un secondo esempio di funzione per la quale entrambe le disuguaglianze sono soddisfatte in senso stretto.

---

1) 

Indicato con C = (x,y) il centro generico di una delle due circonferenze e imponendo la condizione di tangenza ad ambedue gli assi si ha intanto
$$x = y$$
Poi ricordando le relazioni che intercorrono tra i raggi e le distanze dei centri di due circonferenze tangenti si ha, nei due casi,

$$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ x=y \\ \sqrt{x^2+y^2}=x+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ x=y \\ \sqrt{x^2+y^2}=1-x \end{cases}$$

Da questi due sistemi si ricavano le equazioni delle due circonferenze

$$(x-1-\sqrt{2})^2+(y-1-\sqrt{2})^2=(1+\sqrt{2})^2$$
$$(x+1-\sqrt{2})^2+(y+1-\sqrt{2})^2=(-1+\sqrt{2})^2.$$

Per il calcolo dell'area richiesta si può ragionare così: dall'area del quadrato CHOK della figura basta sottrarre la somma fra 1/4 dell'area del cerchio tangente esternamente e l'area del cerchio tangente internamente.

Si ottiene: $(\sqrt{2}+1)^2-\frac{1}{4}\pi(\sqrt{2}+1)^2-\pi(\sqrt{2}-1)^2 = 3+2\sqrt{2}-\frac{3\pi}{2}\left(\frac{5}{3}-\sqrt{2}\right)$

2) Si tratta di un fascio di curve razionali intere con punto base l'origine; hanno tutte lo stesso comportamento all'infinito in quanto $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ per tutte.

Si devono distinguere 3 casi: K < 0 K = 0 K > 0

a) K < 0 per il segno di f(x) abbiamo lo schema: x^2 + + + + + + + +, x^2-k + + + + + + + + ;
per la derivata prima $y'(x) = 2x(2x^2-k)$ si ha invece (dec. | 0 | cresc.), e $y'' = 12x^2 - 2k$ è sempre positiva.

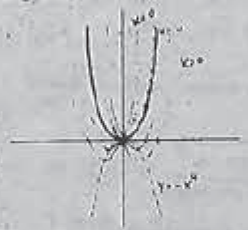
b) K = 0 possiamo fare i tre schemi seguenti:

$y(x)$: + + + | + + + (0); $y'(x)$: − − − | + + + (dec. 0 cresc.); $y''(x)$: + + + | + + + (0; concavità verso l'alto)

c) K > 0 ancora i tre schemi:

$f(x)$: $-\sqrt{k}$, 0, $\sqrt{k}$; $y'(x)$: $-\sqrt{\frac{k}{2}}$, 0, $\sqrt{\frac{k}{2}}$; $y''(x)$: $-\sqrt{\frac{k}{6}}$, $\sqrt{\frac{k}{6}}$ (verso l'alto, verso il basso, verso l'alto)

I grafici al variare di K sono i seguenti:



per K ≤ 0, il minimo si ha per x = 0;
per K > 0, si ha nei punti $\left(-\sqrt{\frac{k}{2}}, -\frac{k^2}{4}\right)$ e $\left(\sqrt{\frac{k}{2}}, -\frac{k^2}{4}\right)$.

Eliminando K nelle equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x=\pm\sqrt{\frac{k}{2}} & k\ge 0 \\ y=-\frac{k^2}{4} \end{cases}$$

si ottiene il luogo dei minimi: $y = -x^4$

Per K = -1 si ottiene $y = x^4 + x^2$ e il grafico è quello in figura a).

Per K = 1 si ha il grafico in figura b) della $y = x^4 - x^2$.

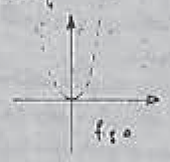


fig a

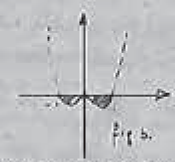


fig b.

Per la simmetria rispetto all'asse $\vec{y}$ delle due regioni finite che essa forma con l'asse $\vec{x}$, basta far notare che $y(-x) = y(x)$.

L'area è subito trovata: $\int_0^1 |x^4 - x^2|\,dx = \frac{2}{15}$.

3) Indichiamo con x e p/x i due numeri e consideriamo l'espressione
$$y = x^2 + \frac{p^2}{x^2};$$
calcoliamone la derivata: $y' = \frac{2(x^2+p)(x^2-p)}{x^3}$ e studiamo la decrescenza della y. Solito schema: dec. $-\sqrt{p}$ cres. 0 dec. $\sqrt{p}$ cres.

D'altra parte il valore assoluto della differenza dei due numeri è dato da $\left|x-\frac{p}{x}\right| = \left|\frac{x^2-p}{x}\right|$; per $\frac{x^2-p}{x} \ge 0$ e cioè per $x \ge \sqrt{p}$, $-\sqrt{p} \le x < 0$ si ha y = x − p/x e la derivata è data da y'(x) = 1 + p/x² che risulta positiva per ogni x ∈ R e la funzione non decresce.

Per $\frac{x^2-p}{x} \le 0$ e cioè per $\begin{cases} x \le -\sqrt{p} \\ 0 < x \le \sqrt{p} \end{cases}$ si ha y = p/x − x e

y'(x) = − p/x² −1 < 0, per ogni x del campo considerato.

La funzione $y(x) = \left|\frac{x^2-p}{x}\right|$ allora decresce in questo campo, il quale poi è anche l'intervallo in cui la $y = x^2 + \frac{p^2}{x^2}$ decresce.

Il valore minimo si ottiene per $x = \pm\sqrt{p}$ e in questo caso i due numeri sono uguali. Se infine x e p/x rappresentano le misure dei lati di un rettangolo, la diagonale è data da $y = \sqrt{x^2 + \frac{p^2}{x^2}}$ e ha valore minimo quando il suo quadrato $y^2 = x^2 + \frac{p^2}{x^2}$ è minimo.

Al quesito a) si poteva anche rispondere in modo elementare. Scritta l'uguaglianza
$$\left(x-\frac{p}{x}\right)^2 + 2p = x^2 + \frac{p^2}{x^2},$$
si osserva subito che al decrescere di $\left|x-\frac{p}{x}\right|$ decresce l'espressione $x^2+\frac{p^2}{x^2}$, essendo 2p costante.

4) Le ipotesi ci permettono di applicare il teorema del valor medio, da cui si ricava l'uguaglianza $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = (1+1)\,f(c)$ con $-1 \le c \le 1$.

Se m e M sono il minimo e il massimo della funzione in [-1,1], si ha la relazione evidente: $2m \le \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \le 2M$.

Per gli esempi richiesti si può pensare alla funzione y = 2 e scrivere: $\int_{-1}^{1} 2\,dx = [2x]_{-1}^{1} = 4$,

il massimo è 2 per cui: $\int_{-1}^{1} 2\,dx = 2 \cdot 2 = 4$

infine si ha $\int_{-1}^{1} (x^2+2)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x\right]_{-1}^{1} = \frac{14}{3}$

e poichè il minimo e il massimo della funzione $y = x^2+2$ nell'intervallo [-1,1] sono y = 2 e y = 3 si ha
$$2 \cdot 2 < \frac{14}{3} < 2 \cdot 3.$$

prof. Ivano Belli