MATEMATICA

4ª Liceo Scientifico

Pratica

Volume I Ferrauto:

Es n: 2158 pag 203 Risolvere il seguente esercizio sulle frazioni algebriche letterali:

$$\left[\frac{2(x-2)}{x^2-4x+3}-\frac{x+3}{x^2+x-2}\right]:\left[\frac{1}{1-x}+\frac{x+1}{x^2-x-6}+\frac{x^2-x-4}{(1-x)(2+x)(3-x)}\right]=$$

$$=\left[\frac{2(x-2)}{(x-1)(x-3)}-\frac{x+3}{(x+2)(x-1)}\right]:\left[\frac{1}{1-x}+\frac{x+1}{(x+2)(x-3)}+\frac{x^2-x-4}{(1-x)(x+2)(3-x)}\right]=$$

$$=\left[\frac{2(x^2-4)-(x^2-9)}{(x-1)(x-3)(x+2)}\right]:\left[\frac{(x+2)(3-x)+(x+1)(x-1)+x^2-x-4}{(1-x)(3-x)(x+2)}\right]=$$

$$=\left[\frac{x^2+1}{(1-x)(3-x)(x+2)}\right]:\left[\frac{-\cancel{x^2}+\cancel{x}+6+\cancel{x^2}-1+x^2-\cancel{x}-4}{(1-x)(3-x)(x+2)}\right]=$$

$$=\frac{\cancel{x^2+1}}{\cancel{(1-x)(3-x)(x+2)}}\cdot\frac{\cancel{(1-x)(3-x)(x+2)}}{\cancel{x^2+1}}=$$

$$=1.$$

Es n: 2159 pag 203 Risolvere il seguente esercizio sulle frazioni algebriche letterali:

$$\left[\frac{a-b}{x-y}-\frac{(x+a)^2-(y+b)^2-2(ay-bx)}{ax+bx-ay-by}\right]:\left[\frac{3(x+y)}{a+b}+6\right]=$$

$$=\left[\frac{a-b}{x-y}-\frac{(x+a)^2-(y+b)^2-2(ay-bx)}{(a+b)(x-y)}\right]:\left[\frac{3(x+y)+6(a+b)}{a+b}\right]=$$

$$=\left[\frac{\cancel{a^2}-\cancel{b^2}-x^2-2ax-\cancel{a^2}+y^2+2by+\cancel{b^2}+2ay-2bx}{(a+b)(x-y)}\right]:\left[\frac{3x+3y+6a+6b}{a+b}\right]=$$

$$=\frac{-x^2-2ax-2bx+y^2+2ay+2by}{(a+b)(x-y)}\cdot\frac{a+b}{3(x+y+2a+2b)}=$$

$$=-\frac{x^2+2ax+2bx-y^2-2ay-2by}{(a+b)(x-y)}:\frac{3(x+y+2a+2b)}{a+b}=$$

$$=-\frac{x(x+2a+2b)-y(y+2a+2b)}{(a+b)(x-y)}\cdot\frac{a+b}{3(x+y+2a+2b)}=$$

$$=-\frac{\cancel{(x-y)}\cancel{(x+2a+2b+y)}}{\cancel{(a+b)}\cancel{(x-y)}}\cdot\frac{\cancel{a+b}}{3\cancel{(x+y+2a+2b)}}=$$

$$=-\frac{1}{3}.$$

Es n: 2163 pag 203 Risolvere il seguente esercizio sulle frazioni algebriche letterali:

$$\left(\frac{4}{4a^2-1}-\frac{1}{2a^2-a}\right)\left[\frac{4(a+1)}{2a+1}+\frac{1}{2a^2+a}\right]\left[\frac{9a^2(a+1)}{a^2-9}+\frac{a^3}{a+3}\right]=$$

$$=\left[\frac{4}{(2a+1)(2a-1)}-\frac{1}{a(2a-1)}\right]\left[\frac{4(a+1)}{2a+1}+\frac{1}{a(2a+1)}\right]\left[\frac{9a^2(a+1)}{(a+3)(a-3)}+\frac{a^3}{a+3}\right]=$$

$$=\left[\frac{4a-2a-1}{a(2a+1)(2a-1)}\right]\cdot\left[\frac{4a^2+4a+1}{a(2a+1)}\right]\left[\frac{9a^3+9a^2+a^4-3a^3}{(a+3)(a-3)}\right]=$$

$$=\frac{\cancel{2a-1}}{\cancel{a}\cancel{(2a+1)}\cancel{(2a-1)}}\cdot\frac{\cancel{(2a+1)^2}}{\cancel{a}\cancel{(2a+1)}}\cdot\frac{\cancel{a^2}(a+3)^{\cancel{2}}}{\cancel{(a+3)}(a-3)}=$$

$$=\frac{a+3}{a-3}.$$

__Es n=2164 pag 203__ Risolvere il seguente esercizio sulle frazioni algebriche letterali:

$$\left(\frac{5xy+3y^2}{x^4+2x^3y+x^2y^2}+\frac{2}{x^2+2xy+y^2}+\frac{1}{x^2+xy}\right):\left(\frac{xy-3y^2}{x^4-x^2y^2}+\frac{1}{x^2-xy}+\frac{2}{x^2+xy}\right)=$$

$$=\left(\frac{5xy+3y^2}{x^2(x+y)^2}+\frac{2}{(x+y)^2}+\frac{1}{x(x+y)}\right):\left(\frac{xy-3y^2}{x^2(x^2-y^2)}+\frac{1}{x(x-y)}+\frac{2}{x(x+y)}\right)=$$

$$=\left(\frac{5xy+3y^2+2x^2+x^2+xy}{x^2(x+y)^2}\right):\left(\frac{xy-3y^2+x^2+xy+2x^2-2xy}{x^2(x+y)(x-y)}\right)=$$

$$=\frac{3(x+y)^2}{x^2(x+y)^2}:\frac{3(x+y)(x-y)}{x^2(x+y)(x-y)}=$$

$$=\frac{\cancel{3}\cancel{(x+y)^2}}{\cancel{x^2}\cancel{(x+y)^2}}\cdot\frac{\cancel{x^2}\cancel{(x+y)}\cancel{(x-y)}}{\cancel{3}\cancel{(x+y)}\cancel{(x-y)}}=$$

$$=1.$$

__Es n=2325 pag 211__ Verificare la seguente identità condizionata.

$$\frac{\frac{2}{x}-\frac{3}{y}}{\frac{2}{x}+\frac{3}{y}}=\frac{\frac{4}{x^2}-\frac{9}{y^2}}{\frac{4}{x^2}+\frac{9}{y^2}+\frac{12}{xy}}$$

$$\frac{\frac{2y-3x}{xy}}{\frac{2y+3x}{xy}};\quad \frac{2y-3x}{\cancel{xy}}\cdot\frac{\cancel{xy}}{2y+3x};\quad \frac{2y-3x}{2y+3x}$$

$$\frac{\frac{4y^2-9x^2}{x^2y^2}}{\frac{9x^2+12xy+4y^2}{x^2y^2}};\quad \frac{4y^2-9x^2}{x^2y^2}\cdot\frac{x^2y^2}{9x^2+12xy+4y^2};\quad \frac{\cancel{(2y+3x)}(2y-3x)}{\cancel{x^2y^2}}\cdot\frac{\cancel{x^2y^2}}{(2y+3x)^{\cancel{2}}};\quad \frac{2y-3x}{2y+3x}$$

$$\frac{2y-3x}{2y+3x}=\frac{2y-3x}{2y+3x}$$

__Es n=2326 pag 211__ Verificare la seguente identità condizionata:

$$\frac{\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}+\frac{4xy}{x^2-y^2}}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2}=\frac{\frac{x+3y}{x-3y}-\frac{x-3y}{x+3y}}{\frac{6x^2-6y^2}{x^3y-9xy^3}};$$

$$\frac{\frac{(x+y)^2+(x-y)^2+4xy}{x^2-y^2}}{\frac{(x+y)^2}{x^2y^2}}=\frac{\frac{(x+3y)^2-(x-3y)^2}{x^2-9y^2}}{\frac{6(x^2-y^2)}{xy(x^2-9y^2)}};$$

$$\frac{\frac{2x^2+4xy+2y^2}{x^2-y^2}}{\frac{(x+y)^2}{x^2y^2}}=\frac{\frac{12xy}{x^2-9y^2}}{\frac{6(x^2-y^2)}{xy(x^2-9y^2)}};$$

$$\frac{2\cancel{(x+y)^2}}{x^2-y^2}\cdot\frac{x^2y^2}{\cancel{(x+y)^2}}=\frac{12xy}{\cancel{x^2-9y^2}}\cdot\frac{xy\cancel{(x^2-9y^2)}}{\cancel{6}(x^2-y^2)};$$

$$\frac{2x^2y^2}{x^2-y^2}=\frac{2x^2y^2}{x^2-y^2}$$

Es n: 2329 pag 211 Verificare la seguente identità condizionata:

$$\frac{\left(1-\frac{1}{2-x}\right)^2-\frac{1-x}{2-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1-x}}\right)^2-\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1+x}}\right)^2}=\frac{\left(\frac{1-x}{2-x}\right)^2+\left(1-\frac{1}{2-x}\right)\cdot\frac{1+x}{x}}{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1-x}}+\frac{1}{1-\frac{1}{1+x}}\right)^2};$$

$$\frac{\frac{(1-x)^2}{(2-x)^2}-\frac{1-x}{2-x}\cdot\left(\frac{1+x}{x}\right)}{\left(\frac{1}{\frac{2-x}{1-x}}\right)^2-\left(\frac{1}{\frac{x}{1+x}}\right)^2}=\frac{\frac{(1-x)^2}{(2-x)^2}+\left(\frac{1-x}{2-x}\right)\cdot\frac{1+x}{x}}{\left(\frac{1}{\frac{2-x}{1-x}}+\frac{1}{\frac{x}{1+x}}\right)^2};$$

$$\frac{\frac{(1-x)^2}{(2-x)^2}-\frac{1-x^2}{x(2-x)}}{\left(\frac{1-x}{2-x}\right)^2-\left(\frac{1+x}{x}\right)^2}=\frac{\frac{(1-x)^2}{(2-x)^2}+\frac{1-x^2}{x(2-x)}}{\left(\frac{1-x}{2-x}+\frac{1+x}{x}\right)^2};$$

$$\frac{\frac{x(1-x)^2+(x^2-1)(2-x)}{x(2-x)^2}}{\frac{x^2(1-x)^2-(1+x)^2\cdot(2-x)^2}{x^2(2-x)^2}}=\frac{\frac{x(1-x)^2+(1-x^2)(2-x)}{x(2-x)^2}}{\left(\frac{x(1-x)+(1+x)(2-x)}{x(2-x)}\right)^2};$$

$$\frac{\frac{x-\cancel{2x^2}+\cancel{x^3}+\cancel{2x^2}-2-\cancel{x^3}+x}{x(2-x)^2}}{\frac{x^2-\cancel{2x^3}+\cancel{x^4}-\cancel{x^4}+\cancel{2x^3}+3x^2-4x-4}{x^2(2-x)^2}}=\frac{\frac{\cancel{x}-2x^2+x^3+2-2x^2-\cancel{x}+x^3}{x(2-x)^2}}{\left(\frac{x-x^2+2+2x-x-x^2}{x(2-x)}\right)^2};$$

$$\frac{\frac{2x-2}{x(2-x)^2}}{\frac{4x^2-4x-4}{x^2(2-x)^2}}=\frac{\frac{2x^3-4x^2+2}{x(2-x)^2}}{\left(\frac{-2x^2+2x+2}{x(2-x)}\right)^2};$$

$$\frac{2(x-1)}{x(2-x)^2}\cdot\frac{x^2(2-x)^2}{2(2x^2-2x-2)}=\frac{2(x^3-2x^2+1)}{x(2-x)^2}\cdot\frac{x^2(2-x)^2}{(2x^2-2x-2)^2};$$

$$\frac{x(x-1)}{2x^2-2x-2}=\frac{2x\cancel{(x^2-x-1)}(x-1)}{\cancel{2(2x^4-4x^3-2x^2+4x+2)}\quad 2x^2-2x-2};$$

$$\frac{x(x-1)}{2x^2-2x-2}=\frac{x(x-1)}{2x^2-2x-2}.$$

Es n: 2459 pag 216 Risolvere la seguente equazione lineare numerica intera:

$$\frac{2x+1}{7}-\frac{(x-1)(x-2)}{2}=\frac{x-2}{2}-2\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2$$

$$\frac{2x+1}{7}-\frac{x^2-3x+2}{2}=\frac{x-2}{2}-\frac{1}{2}x^2+2x-2$$

$$4x+2-\cancel{7x^2}+21x-\cancel{14}=7x-\cancel{14}-\cancel{7x^2}+28x-28$$

$$10x=30$$

$$x=3$$

Es n: 2460 pag 216 Risolvere la seguente equazione lineare numerica intera:

$$\frac{x(x-3)^2}{2}+\frac{x(9x-1)}{3}-\frac{1}{2}x^3=0$$

$$\frac{x^3-6x^2+9x}{2}+\frac{9x^2-x}{3}-\frac{1}{2}x^3=0$$

$$\cancel{3x^3}-\cancel{18x^2}+27x+\cancel{18x^2}-2x-\cancel{3x^3}=0$$

$$25x=0$$

$$x=0$$

Es n: 2470 pag 217 Risolvere la seguente equazione lineare numerica intera:

$$\frac{(2x+3)^3}{4}+2\left[x+4-\frac{1}{2}(2x+5)\right]^3=\frac{(2x+3)(4x^2-6x+9)+(6x+3)^2}{4}$$

$$\frac{(2x+3)^3}{4}+2\left[\cancel{x}+4-\cancel{x}-\frac{5}{2}\right]^3=\frac{(2x+3)(4x^2-6x+9)+(6x+3)^2}{4}$$

$$\frac{\cancel{8x^3}+\cancel{36x^2}+54x+27}{4}+\frac{27}{4}=\frac{\cancel{8x^3}-\cancel{12x^2}+\cancel{18x}+\cancel{12x^2}-\cancel{18x}+27+\cancel{36x^2}+36x+9}{4}$$

$$18x=-18$$

$$x=-1$$

Volume II Ferrauto.

Es n: 190 pag 195 Nell'insieme dei numeri assoluti eseguire la seguente moltiplicazione di radicali aritmetici.

$$\sqrt{\frac{2x^2+3xy}{2xy+y^2}}\cdot\sqrt{\frac{2xy^3+y^4}{2x^4+3x^3y}}$$

$x\neq 0$ et $y\neq 0$

$$\sqrt{\frac{x(2x+3y)}{y(2x+y)}\cdot\frac{y^3(2x+y)}{x^3(2x+3y)}}=\sqrt{\frac{y^2}{x^2}}=\frac{y}{x}$$

Es n: 191 pag 195 Nell'insieme dei numeri assoluti eseguire la seguente moltiplicazione di radicali aritmetici.

$$\sqrt[3]{\frac{4a^3+4a^2b+ab^2}{a^2b+4ab^2+4b^3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2ab+b^2}{a^2+2ab}}$$

$a\neq 0$ et $b\neq 0$

$$\sqrt[3]{\frac{a(2a+b)^2}{b(a+2b)^2}\cdot\frac{b(2a+b)}{a(a+2b)}}=\sqrt[3]{\frac{(2a+b)^3}{(a+2b)^3}}=\frac{2a+b}{a+2b}$$

Es n: 899 pag 231 Risolvere la seguente equazione binomia spuria (mancante il termine noto)

$$\frac{x+a}{a} - \frac{x^2+b}{b} = 0$$

$$bx + \cancel{ab} - ax^2 - \cancel{ab} = 0$$

$$ax^2 = bx$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{b}{a}$$

Es n: 900 pag 231 Risolvere la seguente equazione binomia spuria (mancante il termine noto).

$$\left(\frac{x}{a} - a\right)^2 + 4x = \left(\frac{x}{a} + a\right)^2 + ax(a-x)$$

$$\cancel{a^2} - \frac{2ax}{a} + \cancel{\frac{x^2}{a^2}} + 4x = \cancel{\frac{x^2}{a^2}} + \frac{2ax}{a} + \cancel{a^2} + a^2x - ax^2$$

$$-2x + 4x = 2x + a^2x - ax^2$$

$$ax^2 = a^2x$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = a$$

Es n: 1038 pag 237 Risolvere la seguente equazione numerica di secondo grado.

$$\frac{x(5x-2)}{12} - \frac{x(x+1)}{6} - \frac{x(x-2)}{4} + \frac{(x+3)^2}{3} = 0$$

$$5x^2 - 2x - 2x^2 - 2x - 3x^2 + 6x + 4x^2 + 24x + 36 = 0$$

$$4x^2 + 26x + 36 = 0$$

$$2x^2 + 13x + 18 = 0$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 144}}{4} = \frac{-13 \pm 5}{4} \quad x_1 = -\frac{9}{2} \quad x_2 = -2$$

Es n: 1039 pag 237 Risolvere la seguente equazione numerica di secondo grado.

$$\frac{(x-1)(x-2)}{3} + \frac{(x-1)(x-3)}{8} - \frac{(x-2)(x-3)}{2} = \frac{7-(4-x)^2}{6}$$

$$\frac{x^2-3x+2}{3} + \frac{x^2-4x+3}{8} - \frac{x^2-5x+6}{2} = \frac{7-x^2+8x-16}{6}$$

$$8x^2 - 24x + 16 + 3x^2 - 12x + 9 - 12x^2 + 60x - 72 = 28 - 4x^2 + 32x - 64$$

$$3x^2 - 8x - 11 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+33}}{3} = \frac{4 \pm 7}{3} \quad x_1 = -1 \quad x_2 = \frac{11}{3}$$

Es n: 1067 pag 239 Risolvere la seguente equazione di secondo grado:

$$\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x+6}{2}$$

mcm $= 2(x-3)$ con $x \neq 3$

$$(x-3)(8-x) - 2(2x-11) = (x+6)(x-3)$$

$$-x^2 + 11x - 24 - 4x + 22 = x^2 + 3x - 18$$

$$2x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3 \quad x_1 = -2,\ x_2 = 4$$

Es n: 1068 pag 239 Risolvere la seguente equazione di secondo grado.

$$\frac{x-3}{x^2-x} - \frac{x+3}{x^2+x} = \frac{x-4}{x^2-1}$$

$$\frac{x-3}{x(x-1)} - \frac{x+3}{x(x+1)} = \frac{x-4}{(x+1)(x-1)}$$

mcm $= x(x-1)(x+1)$ con $x \neq 0$ et $x \neq \pm 1$

$$(x-3)(x+1) + (1-x)(x+3) + (4-x)\cdot x = 0$$

$$\cancel{x^2} - \cancel{2x} - \cancel{3} - \cancel{x^2} - \cancel{2x} + \cancel{3} + 4x - x^2 = 0$$

$$-x^2 = 0$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

equazione assurda.

Es n: 1301 pag 251 Scrivere la equazione di secondo grado avente per radici la coppia di numeri seguente.

$(2;3)$ oppure $x^2 - Sx + P = 0$

$(x-2)(x-3) = 0$ $\quad x^2 - 5x + 6 = 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

Es n: 1313 pag 252 Scrivere l'equazione di secondo grado avente per radici la coppia di numeri seguente.

$$\left(-\frac{2}{3};1\right)$$

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-1) = 0$$

$$x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0$$

$$3x^2 - x - 2 = 0$$

Es n: 1317 pag 252 Scrivere l'equazione di secondo grado avente per radici la seguente coppia di numeri.

$\left(\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right)$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=0$

$x^2-2x+\frac{3}{4}=0$

$4x^2-8x+3=0$

Es n: 1327 pag 252 Scrivere l'equazione di secondo grado avente per radici la seguente coppia di numeri.

$(1-\sqrt{3} ; 1+\sqrt{3})$

$(x+\sqrt{3}-1)(x-1-\sqrt{3})$

$x^2-x-\cancel{x\sqrt{3}}+\cancel{x\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{3}}-3-x+1+\cancel{\sqrt{3}}=0$

$x^2-2x-2=0$

Es n: 2397 pag 324 Risolvere la seguente equazione esponenziale.

$(5^{x+1})^{x-1}=1$

$5^{x^2-1}=1$

$x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$

Es n: 2419 pag 325 Risolvere la seguente equazione esponenziale:

$2^{3-\sqrt{x}}+2^{1+\sqrt{x}}=10$

$2^{3-\frac{1}{2}x}+2^{1+\frac{1}{2}x}=2\cdot 5$

$2^2\cdot 2^{1-\frac{1}{2}x}+2\cdot 2^{\frac{1}{2}x}=10$

$2\cdot 2^{2-\frac{1}{2}x}+2\cdot 2^{\frac{1}{2}x}=2\cdot 5$ divido per due.

$2^{2-\frac{1}{2}x}+2^{\frac{1}{2}x}=5$

$2^2\cdot 2^{-\frac{1}{2}x}+2^{\frac{1}{2}x}=5$

$4\cdot\frac{1}{2^{\frac{1}{2}x}}+2^{\frac{1}{2}x}=5$

pongo $2^{\frac{1}{2}x}=y$

$\frac{4}{y}+y=5$

$y^2-5y+4=0$

$y=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2} < \begin{matrix} y_1=1 \\ y_2=4 \end{matrix}$

$2^{\frac{1}{2}x}=1 \Rightarrow x=0$

$2^{\frac{1}{2}x}=4 \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}x}=2^2 \Rightarrow \frac{1}{2}x=2 \Rightarrow x=4$

Ferrauto I.

Es n: 3101 pag 256 Risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x+3y-2z=-3 \\ x+y-3z=-4 \\ 4x+2y+z=-5 \Rightarrow z=-4x-2y-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+3y+8x+4y+10+3=0 \\ x+y+12x+6y+15+4=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x+7y+13=0 \quad | \cdot -1 \\ 13x+7y+19=0 \quad | \ 1 \end{cases}$$

$3x+6=0 \Rightarrow x=-2$

$-20+7y+13=0 \Rightarrow y=1$

$-2+1-3z=-4 \Rightarrow z=1$

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

Es n: 3106 pag 256 Risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x-2y+3z=5 \Rightarrow x=2y-3z+5 \\ 2x+y-2z=-9 \\ 21x-2y-z=-47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y-6z+10+y-2z+9=0 \\ 42y-63z+105-2y-z+47=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y-8z+19=0 \\ 40y-64z+152=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y-8z+19=0 \\ 5y-8z+19=0 \end{cases}$$

Il sistema è indeterminato.

Es n: 3114 pag 257 Risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x+y-z+4t=1 \\ 2x \ \ 3y-z-5t=-16 \\ 3x-3y+2z-2t=-5 \\ 28x-33z=-127 \Rightarrow x=\dfrac{33z-127}{28} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{33z-127}{14} + y - z + 4t = 1 \\ \dfrac{33z-127}{14} - 3y - z - 5t = -16 \\ \dfrac{99z-381}{28} - 3y + 2z - 2t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 33z - 127 + 14y - 14z + 56t - 14 = 0 \\ 33z - 127 - 42y - 14z - 70t + 224 = 0 \\ 99z - 381 - 84y + 56z - 56t + 140 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14y + 19z + 56t - 141 = 0 \\ -42y + 19z - 70t + 97 = 0 \\ -84y + 155z - 56t - 241 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{|cc} 3 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} 76z + 88t - 326 = 0 \\ 117z + 84t - 435 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 38z + 44t - 163 = 0 \Longrightarrow z = \dfrac{163-44t}{38} \\ 117z + 84t - 435 = 0 \end{cases}$$

$$117 \cdot \frac{163-44t}{38} + 84t - 435 = 0$$

$$19071 - 5733t + 3192 - 16530 = 0$$

$$-2541t = -2541 \Longrightarrow t = 1$$

$$76z + 88 - 326 = 0$$

$$76z = 228 \Longrightarrow z = 3$$

$$x = \frac{99-127}{28} = -\frac{28}{28} = -1$$

$$-2 + y - 3 + 4 = 1$$

$$y = 2$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \\ t = 1 \end{cases}$$

Es n: 3126 pag 258 Risolvere il seguente sistema lineare.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x-y)+\frac{1}{3}(y-z)+\frac{1}{4}(z-x)=\frac{1}{12} \\ \frac{1}{3}(x-2)+\frac{1}{6}(2y-1)+\frac{1}{12}(3z-1)=\frac{5}{6} \\ \frac{3}{4}(x+y+z-5)-\frac{4}{3}(2x-y-z+5)=-\frac{21}{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6(x-y)+4(y-z)+3(z-x)=1 \\ 4(x-2)+2(2y-1)+3z-1=10 \\ 9(x+y+z-5)-16(2x-y-z+5)=-21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x-6y+4y-4z+3z-3x-1=0 \\ 4x-8+4y-2+3z-1-10=0 \\ 9x+9y+9z-45-32x+16y+16z-80+21=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-2y-z-1=0 \\ 4x+4y+3z-21=0 \\ -23x+25y+25z-54=0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 3 & 25 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 13x-2y-24=0 \\ 52x-25y-29=0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 4 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$17y-17=0 \Rightarrow y=1$

$13x=26 \Rightarrow x=2$

$6-2-z-1=0 \Rightarrow z=3$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$$

Es n: 3141 pag 261 Calcolare il valore di indeterminatezza del seguente sistema

$$\begin{cases} 2x+3y=8 \Rightarrow x=\frac{8-3y}{2} \\ ax+6y=16 \end{cases}$$

$8a-3ay+12y=32$

$3y(4-a)=8(4-a)$

affinché il sistema sia indeterminato occorre che:

$4-a=0 \Rightarrow a=4$

Es n: 3149 pag 261 Calcolare il valore di indeterminatezza del seguente sistema

$$\begin{cases} kx+(k-1)y+(k+1)z=\frac{5}{2} \\ 3x-2y+z=2 \\ x-y-z=-1 \Rightarrow x=y+z-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k(y+z-1)+(k-1)y+(k+1)z=\frac{5}{2} \\ 3(y+z-1)-2y+z=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ky+kz-k+ky-y+kz+z-\frac{5}{2}=0 \\ 3y+3z-3-2y+z=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y+2ky+2kz+z-k-\frac{5}{2}=0 \\ y-5+4z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y(2k-1)+2z(2k+1)-2k-5=0 \\ y=5-4z \end{cases}$$

$20k-10-16kz+8z+4kz+2z-2k-5=0$

$10z-12kz+18k-15=0$

$2z(5-6k)-3(5-6k)$

affinché il sistema sia indeterminato occorre che:

$5-6k=0 \Rightarrow k=\frac{5}{6}$

Volume Zwirner:

Es n: 27 pag 587 Discutere il seguente sistema:

$$\begin{cases} (m-1)x^2-2(2m-1)x-(m+1)=0 \\ -\frac{1}{2}<x\leq 2 \end{cases}$$

$\frac{1}{4}\Delta=(2m-1)^2+m^2-1=4m^2-4m+1+m^2-1=5m^2-4m$

$\Delta=0$ per $m=0$ et $m=\frac{4}{5}$

$\Delta>0$ per $m<0$ et $m>\frac{4}{5}$

$f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}m-\frac{1}{4}+2m-1-m-1=\frac{5}{4}m-\frac{9}{4}=5m-9\geq 0$ per $m\geq\frac{9}{5}$

$A=m-1\geq 0$ per $m\geq 1$

$-\frac{B}{2A}=\frac{2m-1}{m-1}$

$\frac{2m-1}{m-1}>-\frac{1}{2}$

$$\frac{2m-1}{m-1}+\frac{1}{2}>0$$

$$\frac{4m-2+m-1}{2(m-1)}>0$$

$N>0$ per $m>\frac{3}{5}$

$D>0$ per $m>1$

$\frac{N}{D}>0$ per $m<\frac{3}{5}$ et $m>1$

$$\frac{2m-1}{m-1}>2$$

$$\frac{2m-1}{m-1}-2>0$$

$$\frac{2m-1-2m+1}{m-1}>0$$

$$\frac{1}{m-1}>0$$

$\frac{N}{D}>0$ per $m>1$.

$\Delta>0$ per $m<0$ et $m>\frac{4}{5}$

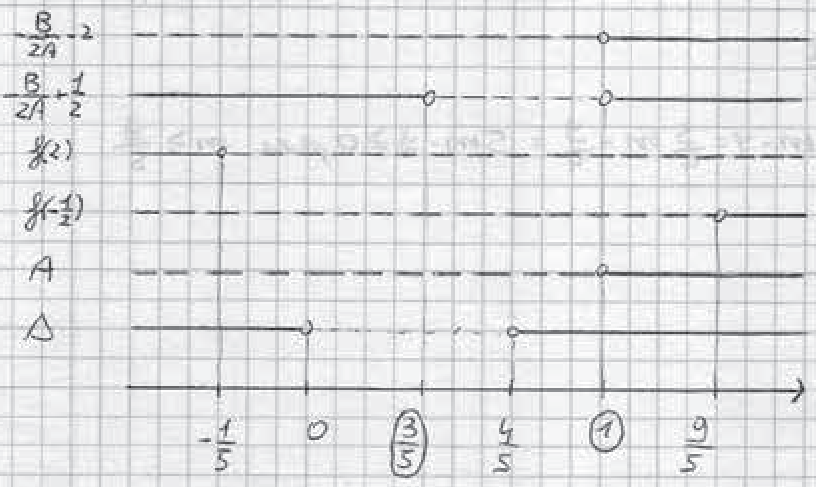
$f(-\frac{1}{2})>0$ per $m>\frac{9}{5}$

$f(2)>0$ per $m<-\frac{1}{5}$

$A>0$ per $m>1$

$-\frac{B}{2A}+\frac{1}{2}>0$ per $m<\frac{3}{5}$ et $m>1$

$-\frac{B}{2A}-2>0$ per $m>1$



1° caso) $m < -\frac{1}{5}$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in R$

$\left.\begin{array}{l} A<0 \\ f(-\frac{1}{2})<0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ "$-\frac{1}{2}$" è esterno all'intervallo delle radici.

$\left.\begin{array}{l} A<0 \\ f(2)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ "2" è interno all'intervallo delle radici.

$-\frac{1}{2} \quad x_1 \quad 2 \quad x_2$

Il sistema ha una sola soluzione data dalla radice più piccola.

2° caso) $m = -\frac{1}{5}$ $\quad f(2)=0 \Rightarrow x=2$ et $x = -\frac{B}{A} - 2 = \frac{2(2m-1)}{m-1} - 2 = \frac{2(-\frac{2}{5}-1)}{-\frac{1}{5}-1} - 2 = \frac{1}{3}$

Il sistema ha una sola soluzione data dal limite superiore.

3° caso) $-\frac{1}{5} < m < 0$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in R$

$\left.\begin{array}{l} A<0 \\ f(-\frac{1}{2})<0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ "$-\frac{1}{2}$" è esterno all'intervallo delle radici.

$\left.\begin{array}{l} A<0 \\ f(2)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ "2" è esterno all'intervallo delle radici.

Il sistema ha 2 soluzioni

4° caso) $m=0$ $\quad \Delta = 0 \Rightarrow \exists\, x_1 = x_2 = -\frac{B}{2A} = \frac{2m-1}{m-1} = 1$

Il sistema ha due soluzioni coincidenti.

5° caso) $0 < m < \frac{4}{5}$ $\quad \Delta < 0$

Il sistema non ha soluzioni perché le radici non sono reali.

6° caso) $m = \frac{4}{5}$ $\quad \Delta = 0 \Rightarrow \exists\, x_1 = x_2 = -\frac{B}{2A} = \frac{2m-1}{m-1} = \frac{\frac{8}{5}-1}{\frac{4}{5}-1} = \frac{\frac{8-5}{5}}{\frac{4-5}{5}} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{1}{5}} = -3.$

Il sistema non ha soluzioni perché le radici coincidenti non soddisfano le limitazioni.

7° caso) $\frac{4}{5} < m < 1$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in R$

$\left.\begin{array}{l} A<0 \\ f(-\frac{1}{2})<0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ "$-\frac{1}{2}$" è esterno all'intervallo delle radici.

$\left.\begin{array}{l} A<0 \\ f(2)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ "2" è esterno all'intervallo delle radici

$$\underset{x_1}{\cdot} \quad \underset{-\frac{1}{2}}{\cdot} \quad \underset{x_2}{\cdot} \quad \underset{2}{\cdot} \longrightarrow$$

$$-\frac{B}{2A}+\frac{1}{2}<0 \Rightarrow -\frac{B}{2A}<-\frac{1}{2}$$

Il sistema non ha soluzioni perchè le radici non soddisfano le limitazioni.

8° caso) $m=1$ $\quad A=0 \Rightarrow -2x-2=0 \Rightarrow x=-1$

Il sistema non ha soluzioni perchè la radice non soddisfa le limitazioni.

9° caso) $1<m<\frac{9}{5}$ $\quad \Delta>0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in R$

$$\left.\begin{matrix} A>0 \\ f(-\frac{1}{2})<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{"}-\tfrac{1}{2}\text{" è interno all'intervallo delle radici.}$$

$$\left.\begin{matrix} A>0 \\ f(2)<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{"}2\text{" è interno all'intervallo delle radici.}$$

Il sistema non ha soluzioni perchè le radici non soddisfano le limitazioni.

10° caso) $m=\frac{9}{5}$ $\quad f(-\frac{1}{2})=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ et $x=-\frac{B}{A}+\frac{1}{2}=\frac{2(2m-1)}{m-1}+\frac{1}{2}=\frac{2(\frac{18}{5}+1)}{\frac{18}{5}-1}+\frac{1}{2}=$

$$\frac{2(\frac{13}{5})}{\frac{13}{5}}+\frac{1}{2}=\frac{26}{5}\cdot\frac{5}{13}+\frac{1}{2}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

Il sistema non ha soluzioni perchè le radici non soddisfano le limitazioni.

11° caso) $m>\frac{9}{5}$ $\quad \Delta>0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in R$

$$\left.\begin{matrix} f(-\frac{1}{2})>0 \\ A>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{"}-\tfrac{1}{2}\text{" è esterno all'intervallo delle radici.}$$

$$\left.\begin{matrix} A>0 \\ f(2)<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{"}2\text{" è interno all'intervallo delle radici.}$$

$$\underset{-\frac{1}{2}}{\cdot} \quad \underset{x_1}{\cdot} \quad \underset{2}{\cdot} \quad \underset{x_2}{\cdot} \longrightarrow$$

Il sistema ha una sola soluzione data dalla radice più piccola.

Es n: 29 pag 587   Discutere il seguente sistema:

$$\begin{cases} (m-1)x^2+2(m+1)zx-3(m-1)z^2=0 \\ 0 \le x \le z \end{cases}$$

$\frac{1}{4}\Delta = (m+1)^2z^2+3z^2(m-1)^2 = m^2z^2+2mz^2+z^2+3mz^2-6mz^2+3z^2 = 4m^2z^2-4mz^2+4z^2 =$

$m^2z^2-mz^2+z^2$

$m = \frac{z^2 \pm \sqrt{z^4-4z^4}}{2z^2}$ impossibile

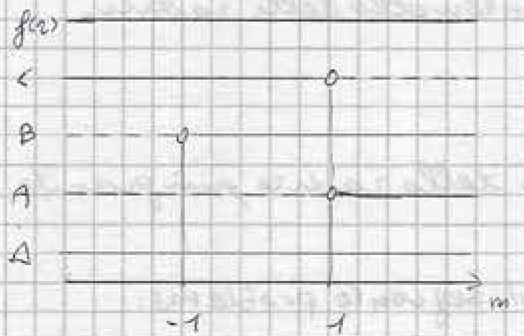
$\Delta > 0 \; \forall m$

$A = m-1>0$ per $m>1$

$B = 2(m+1)>0$ per $m+1>0$ per $m>-1$

$C = -3(m-1)>0$ per $m-1<0$ per $m<1$

$f(z) = mz^2-z^2+2mz^2+2z^2-3mz^2+3z^2 = 4z^2>0 \; \forall m$



1° caso) $m<-1$ $\Delta>0 \Rightarrow \exists\, x_1 \ne x_2 \in R$

$\left.\begin{matrix} A<0 \\ B<0 \\ C>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_1>0 \\ x_2<0 \end{matrix}$ $|x_2|>|x_1|$

$\left.\begin{matrix} A<0 \\ f(z)>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ "z" è interno all'intervallo delle radici

Il sistema non ha soluzioni perché le radici non soddisfano le limitazioni.

2° caso) $m=-1$ $B=0 \Rightarrow (m-1)x^2-3(m-1)z^2=0$

$2x^2=6z^2$

$x=\pm z\sqrt{3}$

Il sistema non ha soluzioni perché le radici non soddisfano le limitazioni.

3° caso) $-1<m<1$ $\Delta>0 \Rightarrow \exists\, x_1 \ne x_2 \in R$

$\left.\begin{matrix} A<0 \\ B>0 \\ C>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_1>0 \\ x_2<0 \end{matrix}$ $|x_1|>|x_2|$

$\left.\begin{array}{l} A<0 \\ f(2)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ "2" è interno all'intervallo delle radici.

$x_1 \quad 0 \quad 2 \quad x_2$

Il sistema non ha soluzioni perché le radici non soddisfano le limitazioni.

4° $(a,0)$ $m=1$ $\quad A=0$ e $C=0 \Rightarrow 2(m+1)2x=0$

$$4\,2x=0 \Rightarrow x=0$$

Il sistema ha una sola soluzione data dal limite inferiore

5° $(a,0)$ $m>1$ $\quad \Delta>0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in R$

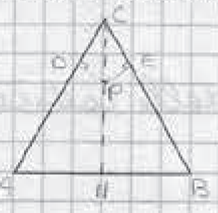
$\left.\begin{array}{l} A>0 \\ B>0 \\ C<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1>0 \\ x_2<0 \end{array} \quad |x_2|>|x_1|$

$\left.\begin{array}{l} f(2)>0 \\ A>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ "2" è esterno all'intervallo delle radici.

$x_2 \quad 0 \quad x_1 \quad 2$

Il sistema ha una sola soluzione data dalla radice più grande.

<u>Es n°44 pag 589</u> Risolvere e discutere il seguente problema:
Sopra un'altezza di un triangolo equilatero di lato a, determinare un punto P tale che la somma dei quadrati delle sue distanze dai lati del triangolo sia ma^2, con $m>0$. Discussione



Ip: $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}=l$

Ts: $\overline{PD}^2+\overline{PE}^2+\overline{PH}^2=ma^2$

pongo $\overline{PH}=x$

$CH=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$

$\overline{CP}=\frac{1}{2}a\sqrt{3}-x$

$PD : AH = PC : AC$

$\overline{PD} : \frac{1}{2}a = (\frac{1}{2}a\sqrt{3}-x) : a$

$$\overline{PD}=\frac{\frac{1}{2}a(\frac{1}{2}a\sqrt{3}-x)}{a}=\frac{1}{4}a\sqrt{3}-\frac{1}{2}x=PE$$

$$(\frac{1}{4}a\sqrt{3}-\frac{1}{2}x)^2+(\frac{1}{4}a\sqrt{3}-\frac{1}{2}x)^2+x^2=ma^2$$

$$\frac{3}{16}a^2-\frac{1}{4}ax\sqrt{3}+\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{16}a^2-\frac{1}{4}ax\sqrt{3}+\frac{1}{4}x^2+x^2=ma^2$$

$$3a^2-4ax\sqrt{3}+4x^2+3a^2-4ax\sqrt{3}+4x^2+16x^2-16ma^2=0$$

$$\begin{cases} 24x^2-8ax\sqrt{3}+6a^2-16ma^2=0 \\ 0<x<\frac{1}{2}a\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\frac{1}{4}\Delta = 48a^2-24(6a^2-16ma^2)=48a^2-144a^2+384ma^2=-96a^2+384ma^2$$

$\Delta=0$ per $m=\frac{1}{4}$

$\Delta>0$ per $m>\frac{1}{4}$

$A=24>0\ \forall m$

$B=-8a\sqrt{3}<0\ \forall m$

$C=6a^2-16ma^2\geq 0$ per $m\leq\frac{3}{8}$

$f(\frac{1}{2}a\sqrt{3})=18a^2-12a^2+6a^2-16ma^2=12a^2-16ma^2\geq 0$ per $m\leq\frac{3}{4}$

$-\frac{B}{2A}=\frac{8a\sqrt{3}}{24}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

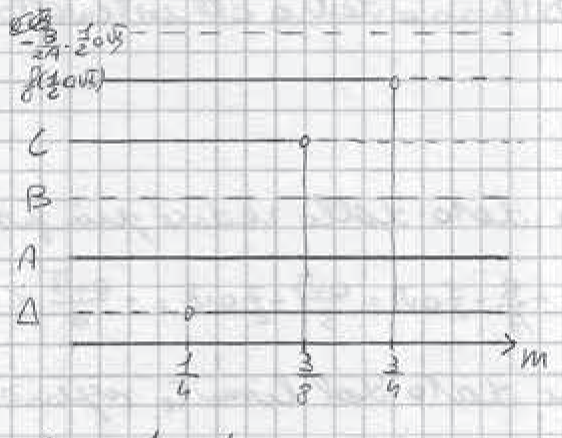
$\frac{a\sqrt{3}}{3}>\frac{1}{2}a\sqrt{3}$

$\frac{a\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}a\sqrt{3}>0$

$\frac{2a\sqrt{3}-3a\sqrt{3}}{6}>0$

$-\frac{a\sqrt{3}}{6}>0$

$\frac{a\sqrt{3}}{6}<0\ \forall m$



1° caso) $m<\frac{1}{4}$ $\Delta<0$

Il problema non ha soluzioni perché le radici non sono reali

2° caso) $m=\frac{1}{4}$ $\Delta=0 \Rightarrow \exists\, x_1=x_2=-\frac{B}{2A}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

Il problema ha 2 soluzioni coincidenti

3° caso) $\frac{1}{4}<m<\frac{3}{8}$ $\Delta>0 \Rightarrow \exists\, x_1\neq x_2\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l}A>0\\B<0\\C>0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}x_1>0\\x_2>0\end{array}$$

$\left.\begin{array}{l}f(\frac{1}{2}a\sqrt{3})>0\\A>0\end{array}\right\} \Rightarrow$ "$\frac{1}{2}a\sqrt{3}$" è esterno all'intervallo delle radici e precisamente a destra perché abbiamo visto che $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ è sempre maggiore della semisomma

Il problema ha 2 soluzioni.

4° caso) $m=\frac{3}{8}$ $\quad C=0 \Rightarrow 24x^2-8a\,x\sqrt{3}=0$

$$x_1=0$$

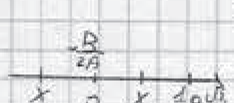
$$x_2=\frac{a\sqrt{3}}{3}<\frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

Il problema ha 2 soluzioni, una delle quali ($x=0$) è la soluzione limite inferiore. Nei casi particolari: per $x=0$ la figura si specializza così:

5° caso) $\frac{3}{8}<m<\frac{3}{4}$ $\quad \Delta>0 \Rightarrow \exists\, x_1\neq x_2 \in R$

$$\left.\begin{array}{l}A>0\\B<0\\C<0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}x_1>0\\x_2<0\end{array} \quad |x_1|>|x_2|$$

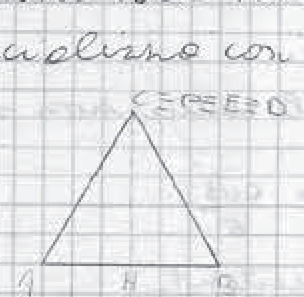
$\left.\begin{array}{l}f(\frac{1}{2}a\sqrt{3})>0\\A>0\end{array}\right\} \Rightarrow$ "$\frac{1}{2}a\sqrt{3}$" è esterno a destra all'intervallo delle radici.



Il problema ha una sola soluzione data dalla radice più grande

6° caso) $m=\frac{3}{4}$ $\quad f(\frac{1}{2}a\sqrt{3})=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ et $x=-\frac{B}{A}-\frac{1}{2}a\sqrt{3}=\frac{a\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}a\sqrt{3}=-\frac{a\sqrt{3}}{6}<0$

Il problema ha una sola soluzione data dal limite superiore e la figura si specializza così:



7° caso) $m>\frac{3}{4}$ $\quad \Delta>0 \Rightarrow \exists\, x_1\neq x_2 \in R$

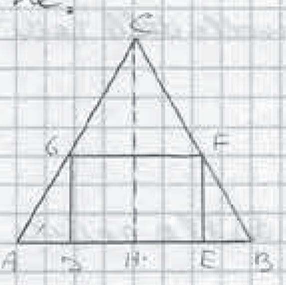
$$\left.\begin{array}{l}A>0\\B<0\\C<0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}x_1>0\\x_2<0\end{array} \quad |x_1|>|x_2|$$

$$\left.\begin{array}{l} A>0 \\ f\left(\frac{1}{2}a\sqrt{3}\right)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{"}\tfrac{1}{2}a\sqrt{3}\text{" è interno all'intervallo delle radici.}$$

$$x_1 \quad 0 \quad \tfrac{1}{2}a\sqrt{3} \quad x_2$$

Il problema non ha soluzioni perché le radici non soddisfano le limitazioni.

Es n:45 pag 589 Risolvere e discutere il seguente problema: (sbagliato: guarda [illegible])
Dato un triangolo equilatero di lato l, determinare il rettangolo inscritto il cui perimetro sia K volte quello del triangolo dato.
Discussione.



$I_p: AC = BC = AB = l$

$T_p: P_{DEFG} = K P_{\overline{ABC}}$

pongo $\overline{GF} = x$

$0 < x < l$

$\overline{AG} = l - x$

$\overline{GD} = \sqrt{\frac{3l^2 - 6lx + 3x^2}{4}}$

$$2x + 2\sqrt{\frac{3l^2 - 6lx + 3x^2}{4}} = 3Kl$$

$$2\sqrt{\frac{3l^2 - 6lx + 3x^2}{4}} = 3Kl - 2x$$

$$3l^2 - 6lx + 3x^2 = 9K^2l^2 - 12Klx + 4x^2$$

$$x^2 - 12Klx + 6lx + 9K^2l^2 - 3l^2 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 2(6Kl - 3l)x + 9K^2l^2 - 3l^2 = 0 \\ 0 < x < l \end{cases}$$

$$\frac{1}{4}\Delta = (6Kl - 3l)^2 - 9K^2l^2 + 3l^2 = 36K^2l^2 - 36Kl^2 + 9l^2 - 9K^2l^2 + 3l^2 = 27K^2l^2 - 36Kl^2 + 12l^2 =$$

$$9K^2 - 12K + 4 = 0$$

$$K = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{9} = \frac{2}{3}$$

$\Delta > 0$ per $K \gtrless \frac{2}{3}$

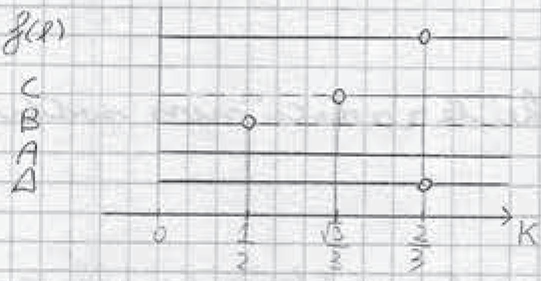
$\Delta = 0$ per $K = 0$

$A = 1 > 0 \ \forall K$

$B = -2(6Kl - 3l) > 0$ per $6Kl - 3l < 0$ per $K < \frac{1}{2}$

$C = 9K^2l^2 - 3l^2 \geq 0$ per $K \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ per $K \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$

$f(l) = l^2 - 12Kl^2 + 6l^2 + 9K^2l^2 - 3l^2 = 9K^2l^2 - 12Kl^2 + 4l^2 \geq 0$ per $K \gtreqless \frac{2}{3}$



1° caso) $0 < K < \frac{1}{2}$. $\Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in R$

$\left.\begin{array}{l} A>0 \\ B>0 \\ C<0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 > 0$ et $x_2 < 0$ $\quad |x_1| < |x_2|$

$\left.\begin{array}{l} A>0 \\ f(l)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ "l" è esterno all'intervallo delle radici.

Il problema ha una sola soluzione data dalla radice più grande.

2° caso) $K = \frac{1}{2}$ $\quad B = 0 \Rightarrow$ $x^2 + 9K^2l^2 - 3l^2 = 0$

$4x^2 + 9l^2 - 12l^2 = 0$

$4x^2 = 3l^2$

$x = \frac{1}{2} l\sqrt{3}$

Il sistema ha una sola soluzione data dalla radice più grande.

3° caso) $\frac{1}{2} < K < \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in R$

$\left.\begin{array}{l} A>0 \\ B<0 \\ C<0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 > 0$ et $x_2 < 0$ $\quad |x_1| > |x_2|$

$\left.\begin{array}{l} A>0 \\ f(l)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ "l" è esterno all'intervallo delle radici.

Il problema ha una sola soluzione data dalla radice più grande.

4° caso) $K = \frac{\sqrt{3}}{3}$. $\quad C = 0 \Rightarrow x^2 - 2(6Kl - 3l)x = 0$

$x^2 - 4l\sqrt{3}x + 6lx = 0$

$x = 0$

$x = 4l\sqrt{3} - 6l.$

Il problema ha due soluzioni.

5° caso) $\frac{\sqrt{3}}{3} < K < \frac{2}{3}$. $\Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in R$

$\left.\begin{matrix} A>0 \\ B<0 \\ C>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_1 > 0$ et $x_2 > 0$.

$\left.\begin{matrix} f(l)>0 \\ A>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ "l" è esterno all'intervallo delle radici.

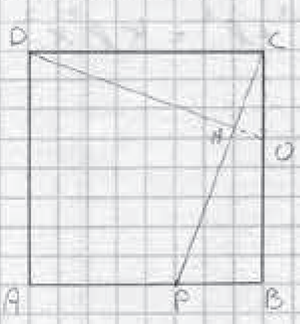
Il problema ha 2 soluzioni.

Es n° 59 pag 592 Risolvere e discutere il seguente problema.

Sul lato $AB=l$ del quadrato ABCD si determini un punto P in modo che congiunto P con C e detto H il piede della perpendicolare condotta da D a PC, si abbia:

$$\overline{HD}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AP}^2 - \overline{PH}^2 = Kl^2.$$

Discussione.



I_p: $AB = BC = DC = AD = l$

T_h: $\overline{HD}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AP}^2 - \overline{PH}^2 = Kl^2$

pongo $\overline{DO} = x$

$l < x \leq l\sqrt{2}$

$DOC = OCD$; dimostrazione:

T_h: $DC = CB$ perchè lati del quadrato.

$D\hat{C}B = P\hat{B}C$ perchè angoli retti.

affinchè i triangoli DOC e PCB siano uguali è sufficiente che $C\hat{D}O = B\hat{C}P$.

chiamo α gli angoli retti:

si ha che $A\hat{D}O = D\hat{O}C$ perchè angoli alterni interni rispetto alla parallela passante per AD e BC tagliata dalla trasversale DO.

allora possiamo scrivere:

$\begin{cases} D\hat{O}C + P\hat{C}B + \alpha = 2\alpha & \text{(triangolo coH)} \\ A\hat{D}O + O\hat{D}C + \alpha = 2\alpha \end{cases}$

$\begin{cases} D\hat{O}C + P\hat{C}B = \alpha \\ A\hat{D}O + O\hat{D}C = \alpha \end{cases}$

poichè $A\hat{D}O = D\hat{O}C \Rightarrow$ si ha che:

$\begin{cases} A\hat{D}O + P\hat{C}B = \alpha \\ A\hat{D}O + O\hat{D}C = \alpha \Rightarrow A\hat{D}O = \alpha - O\hat{D}C \end{cases}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\cancel{\alpha} - O\hat{B}C + P\hat{C}B = \cancel{\alpha} \\ P\hat{C}B = O\hat{B}C \quad \text{come volevasi dimostrare.}\end{array}}$$

$\overline{DO} = \overline{PC} = x$

$\overline{CO} = \overline{PB} = \sqrt{x^2 - l^2}$

$\overline{AP} = l - \sqrt{x^2 - l^2}$

$\overline{CH}$ è l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo DHC.

$$\overline{CH} = \frac{l\sqrt{x^2-l^2}}{x}$$

$$\overline{PH} = x - \frac{l\sqrt{x^2-l^2}}{x} = \frac{x^2 - l\sqrt{x^2-l^2}}{x}$$

$$\overline{DH} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2x^2 - l^4}{x^2}} = \sqrt{\frac{l^2x^2 - l^2x^2 + l^4}{x^2}} = \sqrt{\frac{l^4}{x^2}}.$$

$$\frac{l^4}{x^2} + l^2 + \cancel{l^2} - 2l\sqrt{x^2-l^2} + x^2 - \cancel{l^2} - \left(\frac{x^4 - 2lx^2\sqrt{x^2-l^2} + l^2x^2 - l^4}{x^2}\right) = kl^2$$

$$l^4 + \cancel{l^2x^2} - \cancel{2lx^2\sqrt{x^2-l^2}} + \cancel{x^4} - \cancel{x^4} + \cancel{2lx^2\sqrt{x^2-l^2}} - \cancel{l^2x^2} + l^4 = kl^2x^2$$

$$kl^2x^2 - 2l^4 = 0$$

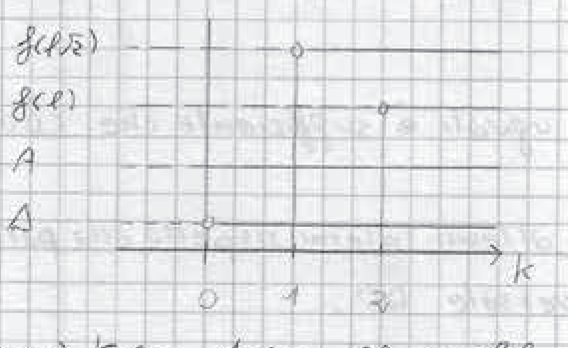
$$\begin{cases} kx^2 - 2l^2 = 0. \\ l < x < l\sqrt{2}. \end{cases}$$

$\Delta = 8kl^2 > 0$ per $k > 0$

$A = k > 0$ per $k > 0$.

$f(l) = kl^2 - 2l^2 > 0$ per $k > 2$

$f(l\sqrt{2}) = 2kl^2 - 2l^2 > 0$ per $k > 1$.



1° caso) $k < 0$ $\Delta < 0$. Il problema non ha soluzioni perché le radici non sono reali.

2° caso) $k = 0$ $\Delta = 0 \Rightarrow \exists\, x_1 = x_2 = -\frac{B}{2A} = 0$.
Il problema non ha soluzioni perché le radici non soddisfano le limitazioni.

3° caso) $0 < K < 1$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in R$.

$$\left.\begin{array}{l} A > 0 \\ f(l) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{"}l\text{" è interno all'intervallo delle radici.}$$

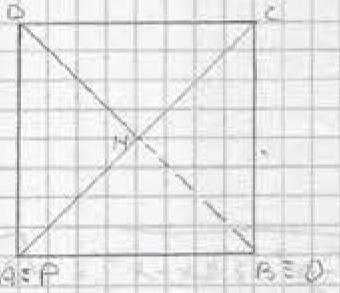
$$\left.\begin{array}{l} A > 0 \\ f(l\sqrt{2}) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{"}l\sqrt{2}\text{" è interno all'intervallo delle radici}$$

Il problema non ha soluzioni perché le radici non soddisfano le limitazioni.

4° caso) $K = 1$ $\quad f(l\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow x = l\sqrt{2}$ et $x = -\frac{B}{A} - l\sqrt{2} = 0 - l\sqrt{2} = -l\sqrt{2}$.

Il problema ha una sola soluzione data dal limite superiore.

La figura si specializza così:



5° caso) $1 < K < 2$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in R$

$$\left.\begin{array}{l} A > 0 \\ f(l) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{"}l\text{" è interno all'intervallo delle radici}$$

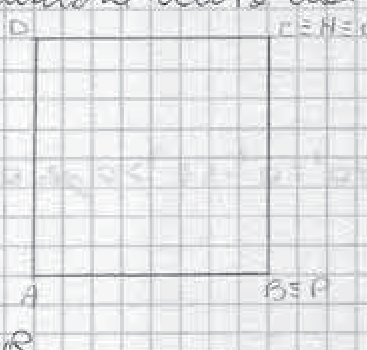
$$\left.\begin{array}{l} A > 0 \\ f(l\sqrt{2}) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{"}l\sqrt{2}\text{" è esterno all'intervallo delle radici.}$$

Il problema ha una sola soluzione data dalla radice più grande.

6° caso) $K = 2$ $\quad f(l) = 0 \Rightarrow x = l$ et $x = -\frac{B}{A} - l = -l$

Il problema ha una sola soluzione data dal limite inferiore

La figura si specializza così:



7° caso) $K > 2$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in R$

$$\left.\begin{array}{l} A > 0 \\ f(l) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{"}l\text{" è esterno all'intervallo delle radici} \qquad \left.\begin{array}{l} A > 0 \\ f(l\sqrt{2}) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{"}l\sqrt{2}\text{" è esterno all'intervallo delle radici}$$

Il problema non ha soluzioni perché le radici non soddisfano le limitazioni

Es n. 68 pag 593 Risolvere e discutere il seguente problema:

In un cerchio di raggio r, a quale distanza dal centro bisogna condurre una corda parallela ad una tangente, perché abbassando dalle estremità della corda le perpendicolari sulla tangente, la diagonale del rettangolo così formato sia uguale ad una quantità data a? Discussione.

Ip: $\overline{OF} = r$

Th: $\overline{AD} = a$

pongo $\overline{EF} = x$

$0 < x < 2r$

$\overline{OE} = r - x$

$\overline{AE} = \sqrt{r^2 - (r-x)^2} = \sqrt{\cancel{r^2} - \cancel{r^2} + 2rx - x^2} = \sqrt{2rx - x^2}$

$\overline{AB} = 2\sqrt{2rx - x^2}$

$\overline{AD} = \sqrt{x^2 + 8rx - 4x^2} = \sqrt{8rx - 3x^2}$

$$\begin{cases} \sqrt{8rx - 3x^2} = a \\ 0 < x < 2r \\ a > 0 \end{cases}$$

$8rx - 3x^2 = a^2$

$3x^2 - 8rx + a^2 = 0$

$\frac{1}{4}\Delta = 16r^2 - 3a^2 > 0$ per $a < 4r\sqrt{\frac{1}{3}}$ per $a < \frac{4r\sqrt{3}}{3}$

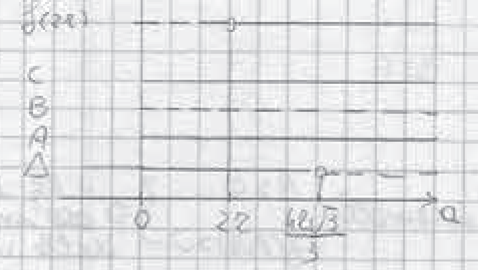
$\Delta > 0$ per $a < \frac{4r\sqrt{3}}{3}$

$A = 3 > 0 \ \forall a$

$B = -8r < 0 \ \forall a$

$C = a^2 > 0$

$f(2r) = 12r^2 - 16r^2 + a^2 = a^2 - 4r^2 > 0$ per $a > 2r$



1° caso) $0 < a < 2r$ $\Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in R$

$$\left.\begin{array}{l} A>0 \\ B<0 \\ C>0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} f(2r)<0 \\ A>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{"}2r\text{" è interno all'intervallo delle radici}$$

Il problema ha una sola soluzione data dalla radice più piccola.

2° caso) $a = 2r$ $f(2r) = 0 \Rightarrow x = 2r$ et $x = -\frac{B}{A} - 2r = \frac{8}{3}r - 2r = \frac{2}{3}r$

Il problema ha una sola soluzione data dalla radice più piccola.

3° caso) $2r < a < \frac{4r\sqrt{3}}{3}$ $\Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in R$

$$\left.\begin{array}{l} A>0 \\ B<0 \\ C>0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 > 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} f(2r)>0 \\ A>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{"}2r\text{" è esterno all'intervallo delle radici.}$$

Il problema ha 2 soluzioni.

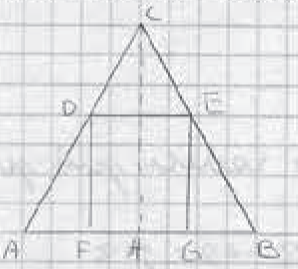
4° caso) $a = \frac{4r\sqrt{3}}{3}$. $\Delta = 0 \Rightarrow \exists\, x_1 = x_2 = -\frac{B}{2A} = \frac{4}{3}r$

Il problema ha 2 soluzioni coincidenti.

5 caso) $a > \frac{4r\sqrt{3}}{3}$ $\Delta < 0$ Il problema non ha soluzioni perché le radici non sono reali.

Es n° 45 pag 583 Risolvere e discutere il seguente problema:

Dato un triangolo equilatero di lato l, determinare il rettangolo inscritto il cui perimetro sia k volte quello del triangolo dato. Discussione.



Ip: $\overline{BC} = l$

Ts: $P_{DEFG} = k\, P_{\overline{ABC}}$

pongo $\overline{FH} = x$

$0 < x < \frac{1}{2} l$

$\overline{AF} = \frac{1}{2} l - x$

$\overline{DF} = (\frac{1}{2} l - x)\sqrt{3}$

$$\begin{cases} 4x + l\sqrt{3} - 2x\sqrt{3} = 3kl \\ 0 < x < \frac{1}{2} l \end{cases}$$

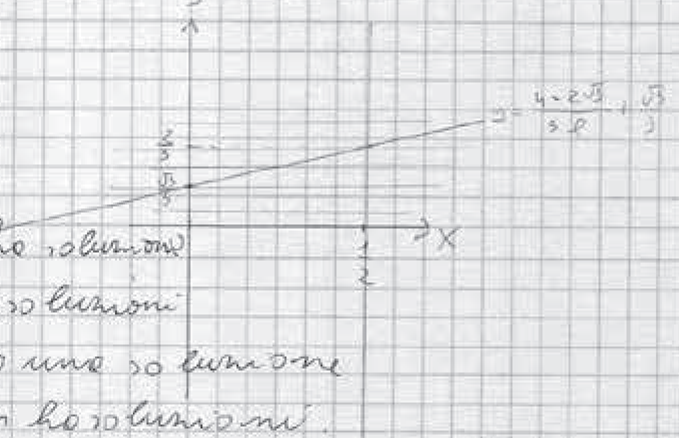
$$\begin{cases} (4 - 2\sqrt{3})x - 3kl + l\sqrt{3} = 0 \\ 0 < x < \frac{1}{2} l \end{cases}$$

pongo $k = y$

$$\begin{cases} (4 - 2\sqrt{3})x - 3ly + l\sqrt{3} = 0 \\ 0 < x < \frac{1}{2} l \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{3l} x + \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 < x < \frac{1}{2} l \end{cases}$$

x	y
0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{1}{2} l$	$\frac{2}{3}$



1° caso) $y < \frac{\sqrt{3}}{3}$. Il problema non ha soluzioni

2° caso) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Il problema non ha soluzioni

3° caso) $\frac{\sqrt{3}}{3} < y < \frac{2}{3}$ il problema ha una soluzione

4° caso) $y = \frac{2}{3}$ il problema non ha soluzioni.

5° caso) $y > \frac{2}{3}$ il problema non ha soluzioni.

Esercizio: risolvere le disequazioni irrazionali date:

$\sqrt{x-1} > x-3$

$x-1 \geq 0$

soddisfatta questa condizione il primo membro assume valori positivi o nulli.

supponiamo

$x-3 < 0$

$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}$

se questo sistema ha delle soluzioni, queste risolvono la disequazione.

$\begin{cases} x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ x-3 < 0 \Rightarrow x < 3 \end{cases}$

$1 \leq x < 3$ or. $x \in [1;3)$

supponiamo

$\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases}$

se queste condizioni sono simultaneamente soddisfatte nessuno dei due membri è negativo, allora posso elevare al quadrato la disequazione data:

$x-1 > (x-3)^2$

$\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-3 \geq 0 \\ x-1 > x^2 - 6x + 9 \end{cases}$

Posso non considerare la prima disequazione perché contenuta nella terza.

$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-1 > x^2 - 6x + 9 \end{cases}$

$x^2 - 7x + 10 < 0$

$\Delta = 49 - 40 = 9 > 0$

$x = \frac{7 \pm 3}{2} \left< \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 5 \end{array} \right.$

$2 < x < 5$

$3 \leq x < 5$

La disequazione di partenza è risolta dall'unione delle soluzioni del primo e secondo sistema:

$[1;3) \cup [3;5) = [1;5)$

$\sqrt{-x^2-x+6} > 6x+3$

$f(x): -x^2-x+6 \geq 0$

$x=-3 \vee x=2$

$f(x)>0$ per $-3\leq x\leq 2$

supponiamo

$6x+3<0$

$\begin{cases} -3\leq x\leq 2 \\ x<\frac{1}{2} \end{cases}$ e questo sistema ha delle soluzioni, queste risolvono la disequazione

$-3\leq x\leq \frac{1}{2}$ o $[-3;\frac{1}{2}]$

supponiamo

$\begin{cases} -x^2-x+6>0 \\ 6x+3\geq 0 \end{cases}$

posso elevare al quadrato la disequazione

$\begin{cases} -x^2-x+6>0 \Rightarrow -3<x<2 \text{ superfluo} \\ x\geq\frac{1}{2} \\ -x^2-x+6>36x^2+36x+9 \end{cases}$

$-x^2-x+6>36x^2+36x+9$

$37x^2+37x+3<0$

$x=\frac{-37\pm\sqrt{1369-444}}{74}=\frac{-37\pm\sqrt{925}}{74}=\frac{-3\pm5\sqrt{7}}{24}=-\frac{1}{2}\pm\frac{5}{24}\sqrt{37} \begin{cases} x_1=-\frac{1}{2}-\frac{5}{24}\sqrt{37} \\ x_2=-\frac{1}{2}+\frac{5}{24}\sqrt{37} \end{cases}$

$-\frac{1}{2}-\frac{5}{24}\sqrt{37}<x<-\frac{1}{2}+\frac{5}{24}\sqrt{37}$

$-\frac{1}{2}\leq x<-\frac{1}{2}+\frac{5}{24}\sqrt{37}$

La disequazione è risolta per

$-3\leq x<-\frac{1}{2}+\frac{5}{24}\sqrt{37}$

$$A = \sqrt[6]{\frac{208,3+551^2}{3745^4}} = \sqrt[6]{\frac{304369,3}{3745^4}}$$

$$A = \frac{1}{6}\left(\lg 304309,3 - 4\lg 3745\right)$$

$\lg 304309,3$ $\qquad$ $5,48339$

$\lg 3745 = -3,52345$

$4\lg 3745 = -14,2938$

$6\lg A =$

$$\begin{array}{r} 5,48339 \\ \bar{15},70620 \\ \hline \bar{9},18959 \end{array}$$

$\lg A = \bar{2},53160$

Trovare i logaritmi dei seguenti numeri:

$\lg 1234 = 3,09152$

$\lg 3395 = 3,53084$

$\lg 3155 = 3,49900$

$\lg 39432 = 4,59585$

$\lg 64352 = 4,80856$

Trovare il numero di cui si sa il logaritmo:

$N \lg = 2,33452$

$\lg N = 216,03$

$N \lg = 2,38650$

$N = 243,5$

$N \lg = 1,33143$

$N = 38,046$

$$A = \sqrt{\frac{3 \cdot 286,48}{\pi \cdot 12,72}}$$

$$\lg A = \frac{1}{2}\lg 3 + \lg 286,48 + \operatorname{clg} \pi + \operatorname{clg} 12,72$$

$\lg 3 =$		$0,47712$
$\lg 286,48 =$		$2,45709$
$\operatorname{clg} \pi =$	$0,49715$	$\bar{1},50285$
$\operatorname{clg} 12,72 =$	$-1,10449$	$\bar{2},89551$
$2 \lg A$		$1,33247$

$\lg A = 0,66628$.

Definizione di coseno: il coseno di un angolo orientato è il rapporto fra l'ascissa di un qualunque punto preso sul 2° lato e distinto dal vertice e la sua distanza dal vertice quando l'angolo è posto in un R.C.O con il vertice nell'origine e il primo lato coincidente con il semiasse positivo delle ascisse.

Definizione di seno: il seno di un angolo orientato è il rapporto fra l'ordinata di un qualunque punto preso sul secondo lato e distinto dal vertice e la sua distanza dal vertice quando l'angolo è posto in un R.C.O con il vertice nell'origine e il primo lato coincidente con il semiasse positivo delle ascisse

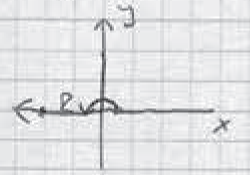
Definizione di tangente: la tangente di un angolo orientato è il rapporto fra l'ordinata e l'ascissa di un qualunque punto preso sul secondo lato e distinto dal vertice quando l'angolo è posto in un R.C.O. con il vertice nell'origine e il primo lato coincidente col semiasse positivo delle ascisse.

Risoluzione di un triangolo rettangolo:
In un triangolo rettangolo un cateto è uguale al prodotto fra l'ipotenusa e il coseno dell'angolo da esso formato.

In un triangolo rettangolo un cateto è uguale al prodotto fra l'ipotenusa e il seno dell'angolo opposto al cateto considerato

In un triangolo rettangolo un cateto è uguale al prodotto dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al cateto considerato.

$\alpha = 180° \Rightarrow y = 0$ et $x = -r$



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} = \frac{0}{r} = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{-r}{r} = -1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{0}{-r} = 0$$

16 Riduzione delle funzioni goniometriche di un angolo a quelle di un angolo del primo ottante:

sen 1047°

$$1047° \,|\, \underline{360°}$$
$$327 \quad 2$$

sen 1047° = sen 327°

$$360° -$$
$$\underline{327° =}$$
$$33$$

sen 1047° = sen 327° = - sen 33°

cos 1047° = cos 327° = cos 33°

tg 1047° = tag 327° = - tg 33°

sen (820° 12' 14")

$$820° 12' 14" \,|\, \underline{360°}$$
$$100° 12' 14" \quad 2$$

sen (820° 12' 14") = sen (100° 12' 14")

180° - (100° 12' 14") =

$$179° 59' 60" -$$
$$\underline{100° 12' 14" =}$$
$$79° 47' 46"$$

sen (820° 12' 14") = sen (100° 12' 14") = sen (79° 47' 46") -

90° - (79° 47' 46") =

$$89° 59' 60"$$
$$\underline{79° 47' 46"}$$
$$10° 12' 14"$$

sen (820° 12' 14") = sen (100° 12' 14") = sen (79° 47' 46") = sen (10° 12' 14") = cos(10° 12' 14")

<u>Esercizio</u>: ridurre al primo ottante le:

400° 20'

6930°

8400° 50' 20"

600° 18' 40",7

sen 400° 20' = sen 40° 21'

$$400° 20' \,|\, \underline{360°}$$
$$40° 20' \quad 1$$

cos 400° 20' = cos 40° 21'

tg 400° 20' = tg 40° 21'

$\text{sen } 6930° = \text{sen } 90° = \cos 0°$

$$\begin{array}{l|l} 6930° & 360 \\ \hline 3330 & 19 \\ 90 & \end{array}$$

$\cos 6930° = \cos 90° = \text{sen } 0°$

$\text{tg } 6930° = \text{tg } 90°$ impossibile.

$\text{sen}(8400°50'20'') = \text{sen}(120°50'20'') = \text{sen}(59°09'40'') = \cos(30°50'20'')$

$$\begin{array}{l|l} 8400°50'20'' & 360° \\ \hline 1200 & 23 \\ 120°50'20'' & \end{array}$$

$180° - (120°50'20'') =$

$$\begin{array}{r} 179°59'60'' - \\ 120°50'20'' \\ \hline 59°09'40'' \end{array}$$

$90° - (59°09'40'') =$

$$\begin{array}{r} 89°59'60'' - \\ 59°09'40'' = \\ \hline 30°50'20'' \end{array}$$

tg

~~sen~~ $\cos(8400°50'20'') = \cos(120°50'20'') = -\cos(59°09'40'') = -\text{sen}(30°50'20'')$

$\text{tg}(8400°50'20'') = \text{tg}(120°50'20'') = -\text{tg}(59°09'40'') = -\text{cotg}(30°50'20'')$

$\text{sen}(600°18'40'',7) = \text{sen}(240°18'40'',7) = -\text{sen}(119°41'20'',3) = -\text{sen}(60°18'40'',7) = -\cos(29°41'13'',3)$

$$\begin{array}{l|l} 600°18'40'',7 & 360° \\ \hline 240°18'40'',7 & 1 \end{array}$$

$360° - (240°18'40'',7) =$

$$\begin{array}{r} 359°59'60''\ 0 \\ 240°18'40'',7 \\ \hline 119°41'20'',3 \end{array}$$

$180° - (119°41'20'',3) =$

$$\begin{array}{r} 179°59'60''\ 0 \\ 119°41'20''\ 3 \\ \hline 60°18'40'',7 \end{array}$$

$90° - (60°18'40'',7)$

$$\begin{array}{r} 89°59'60'' \\ 60°18'40''\ 7 \\ \hline 29°41'20'',3 \end{array}$$

$\text{tg}(600°18'40'',7) = \text{tg}(240°18'40'',7) = -\text{tg}(119°41'20'',3) = \text{tg}(60°18'40'',7) = \text{cotg}(29°41'13'',3)$

$\cos(600°18'40'',7) = \cos(240°18'40'',7) = \cos(119°41'20'',3) = -\cos(60°18'40'',7) = -\text{sen}(29°41'13'',3)$

<u>Esercizio</u>: Calcolare le funzioni goniometriche dei seguenti angoli:

$75°;\ 15°;\ 135°;\ 18°$

$\text{sen } 75° = \text{sen}(45°+30°) = \text{sen } 45° \cdot \cos 30° + \text{sen } 30° \cdot \cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} =$
$= \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

$\cos 75° = \cos(45°+30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° - \text{sen } 45\ \text{sen } 30° = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} =$
$= \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$\text{tg } 75° = \text{tg}(45°+30°) = \dfrac{\text{tg } 45° + \text{tg } 30°}{1 - \text{tg } 45° \cdot \text{tg } 30°} = \dfrac{1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}} = \dfrac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{3}{3-\sqrt{3}} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} =$
$\dfrac{(3+\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = \dfrac{9+6\sqrt{3}+3}{9-3} = \dfrac{12+6\sqrt{3}}{6} = 2+\sqrt{3}$

$\text{sen } 15° = \text{sen}(45°-30°) = \text{sen } 45° \cdot \cos 30° - \cos 45° \cdot \text{sen } 30° = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} =$
$= \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$\cos 15° = \cos(45°-30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° + \text{sen } 45° \cdot \text{sen } 30° = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} =$
$\frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

17

$tg\,15° = tg(45°-30°) = \frac{tg45° - tg30°}{1+tg45°\cdot tg30°} = \frac{1-\frac{1}{3}\sqrt{3}}{1+\frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{\frac{3+\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{(3-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} =$

$\frac{9-6\sqrt{3}+3}{9-3} = \frac{12-6\sqrt{3}}{6} = 2-\sqrt{3}$

$sen\,135° = sen(90°+45°) = sen90°\cdot cos45° + cos90°\cdot sen45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$cos\,135° = cos(90°+45°) = cos90°\cdot cos45° - sen90°\cdot sen45° = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$tg\,135° = tg(90°+45°) = \frac{tg90°+tg45°}{1-tg90°\cdot tg45°} = \frac{1}{1-1}$

$sen\,18° = \frac{1}{4}$ ~~sen36°~~

Es n: 39 pag 329

$sen\,\alpha = \frac{1}{2} \qquad 0° < \alpha < 90°$

Poiché il secondo lato di questo angolo si trova nel primo quadrante, le sue funzioni trigonometriche saranno positive.

$cos\,\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$tg\,\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Es n: 40 pag 329

$sen\,\alpha = -\frac{1}{3} \qquad 270° < \alpha < 360°$

Poiché il secondo lato di questo triangolo si trova nel terzo quadrante il coseno sarà positivo.

$cos\,\alpha = \sqrt{1+\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{10}$

$tg\,\alpha = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{10}}{3}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

Es n: 41 pag 329

$sen\,\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad 180° < \alpha < 270°$

Poiché il secondo lato è nel terzo quadrante il coseno sarà negativo.

$cos\,\alpha = -\sqrt{1+\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}\sqrt{7}$

$tg\,\alpha = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{-\frac{1}{2}\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{7}\sqrt{21}$

Es n: 42 pag 329

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{4}\sqrt{2} \qquad 90° < \alpha < 180°$

Poiché il secondo lato è nel secondo quadrante il coseno sarà negativo:

$\cos\alpha = -\sqrt{1-\frac{2}{4}} = -\sqrt{\frac{7}{8}}$

$tg\,\alpha = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{-\sqrt{\frac{7}{8}}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\frac{8}{7}} = -\frac{4}{4\sqrt{7}} = -\frac{1}{\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{7}}{7}$

Es n: 51 pag 329

$tg\,\alpha = \sqrt{3} - 2 \qquad 90° < \alpha < 180°$

Es n: 54 pag 329

$\cos\alpha = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) \qquad 0° < \alpha < 90°$

Poiché il secondo lato è nel primo quadrante il seno sarà positivo

$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\left[\frac{1}{16}(6+2\sqrt{5})\right]} = \sqrt{1-\frac{6}{16}-\frac{2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

$tg\,\alpha = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\frac{1}{4}\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$

Es n: 57 pag 329

$\operatorname{cosec}\alpha = -\sqrt{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad 270° < \alpha < 360°$

Poiché il secondo lato si trova nel quarto quadrante il coseno sarà positivo:

$\cos\alpha = \sqrt{1+\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$

$tg\,\alpha = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Es n: 58 pag 329

$\sec\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{coseno}\,\alpha = \frac{3}{4} \qquad 0° < \alpha < 90°$

Poiché il secondo lato si trova nel primo quadrante il seno sarà positivo

$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{7}$

$tg\,\alpha = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{7}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{7}\cdot\frac{4}{3} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

Es n° 59 pag 330

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - tg\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi - \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen}45^\circ - tg\,45^\circ + \operatorname{sen}270^\circ - \cos 45^\circ + \cos 90^\circ$$

$$\cancel{\frac{1}{2}\sqrt{2}} - 1 - 1 - \cancel{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 2$$

Es n° 50 pag 330

$$\frac{\cos\frac{3}{2}\pi - \cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}} - tg\,\pi + tg\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\cos 270^\circ - \cos 45^\circ}{\cos 90^\circ - \operatorname{sen}45^\circ} - tg\,180^\circ + tg\,45^\circ + \operatorname{sen}90^\circ =$$

$$\frac{0 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}{0 - \frac{1}{2}\sqrt{2}} - 0 + 1 + 1 = 3$$

Es n° 2 pag 350

$$\frac{\operatorname{sen}^3\alpha - \cos^3\alpha}{\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha} = 1 + \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha - \cos^2\alpha\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha} = \frac{(1-\cos^2\alpha)\operatorname{sen}\alpha - (1-\operatorname{sen}^2\alpha)\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\alpha - \cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha} = \frac{\cancel{\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha}}{\cancel{\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha}} + \frac{(\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha)(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha} =$$

$$= \boxed{1 + \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}$$

Es n° 3 pag 350

$$tg\,\alpha - cotg\,\alpha = \frac{2\operatorname{sen}^2\alpha - 1}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$$

$$tg\,\alpha - cotg\,\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}.$$

per una delle ~~de~~ relazioni fondamentali della trigonometria abbiamo:

$\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$.

$$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha - 1 + \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha} = \boxed{\frac{2\operatorname{sen}^2\alpha - 1}{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}}$$

Es n° 59 pag 353 verificare la seguente identità

$$\cos(30° - \alpha) - \cos(30° + \alpha) = \operatorname{sen}(180° - \alpha)$$

$$\cos(30° - \alpha) - \cos(30° + \alpha) = \cancel{\cos 30° \cos \alpha} + \operatorname{sen} 30° \operatorname{sen} \alpha - \cancel{\cos 30° \cos \alpha} + \operatorname{sen} 30° \operatorname{sen} \alpha =$$

$$= 2 \operatorname{sen} 30° \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(180° - \alpha)$$

Es n° 60 pag 353 verificare la seguente identità

$$\left[tg(45° + \alpha) - tg(45° - \alpha) \right] \frac{1 - tg(180° - \alpha)}{1 - tg(360° + \alpha)} = \frac{4 tg \alpha}{(1 - tg \alpha)^2}$$

$$\left[tg(45° + \alpha) - tg(45° - \alpha) \right] \frac{1 - tg(180° - \alpha)}{1 - tg(360° + \alpha)} =$$

$$= \left[\frac{tg 45° + tg \alpha}{1 - tg 45° tg \alpha} - \frac{tg 45° - tg \alpha}{1 + tg 45° tg \alpha} \right] \frac{1 + tg \alpha}{1 - tg \alpha} =$$

$$= \left[\frac{1 + tg \alpha}{1 - tg \alpha} - \frac{1 - tg \alpha}{1 + tg \alpha} \right] \frac{1 + tg \alpha}{1 - tg \alpha} = \frac{(1 + tg \alpha)^2 - (1 - tg \alpha)^2}{(1 - tg \alpha)\cancel{(1 + tg \alpha)}} \cdot \frac{\cancel{1 + tg \alpha}}{1 - tg \alpha} =$$

$$= \frac{\cancel{1} + 2 tg \alpha + \cancel{tg^2 \alpha} - \cancel{1} + 2 tg \alpha - \cancel{tg^2 \alpha}}{(1 - tg \alpha)^2} = \frac{4 tg \alpha}{(1 - tg \alpha)^2}$$

Es n° 62 pag 353 verificare la seguente identità:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta) \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} = tg^2 \alpha - tg^2 \beta$$

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta) \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} = \frac{(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta)(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} =$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \beta + \cancel{\cos \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha \cos \beta} - \cancel{\cos \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \alpha \cos \beta} - \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} =$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha (1 - \operatorname{sen}^2 \beta) - (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) \operatorname{sen}^2 \beta}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} =$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha - \cancel{\operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta} - \operatorname{sen}^2 \beta + \cancel{\operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta}}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} = tg^2 \alpha - tg^2 \beta$$

13 Es n: 57 pag 352 Verificare la seguente identità:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$$

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\alpha\,\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} - \frac{\cos\alpha\,\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$$

Es n: 58 pag 352

$$\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{2}\cos(45° - \alpha)$$

$$\sqrt{2}\cos(45°-\alpha) =$$ [illegible]

$$= \sqrt{2}\cos 45°\ \sqrt{2}\cos\alpha + \sqrt{2}\operatorname{sen}45\ \sqrt{2}\operatorname{sen}\alpha =$$ [illegible]

[illegible]

Es n: 61 pag 353

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta}$$

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)} =$$

$$= \frac{(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta)(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta)}{(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\alpha(1-\operatorname{sen}^2\beta) - (1-\operatorname{sen}^2\alpha)\operatorname{sen}^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta - (1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta - 1 + \cos^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta}{-1 + \cos^2\beta + \cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta}{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta}$$

(al denominatore viene $-\operatorname{sen}^2\beta$ perché sarebbe $-(1-\cos^2\beta)$ e cioè $-1+\cos^2\beta$).

Es n°80 pag 646

Dato l'iperbole $3x^2-10y^2=5$, dopo averla scritta in forma canonica, trovare le coordinate dei fuochi, l'eccentricità e l'equazione degli asintoti.

l'iperbole è del tipo $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ con i fuochi sull'asse x.

$3x^2-10y^2=5$

$\frac{3}{5}x^2-2y^2=1$

$\frac{x^2}{\frac{5}{3}}-\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$

$a=\sqrt{\frac{5}{3}}$

$b=\sqrt{\frac{1}{2}}$

$c=\sqrt{\frac{5}{3}+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{10+3}{6}}=\sqrt{\frac{13}{6}}$

Le coordinate dei fuochi sono

$F_1(\sqrt{\frac{13}{6}},0)$

$F_2(-\sqrt{\frac{13}{6}},0)$

L'eccentricità è:

$\frac{\sqrt{\frac{13}{6}}}{\sqrt{\frac{5}{3}}}=\sqrt{\frac{13}{6}}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}=\sqrt{\frac{13}{10}}$

L'equazione degli asintoti è:

$y=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{5}{3}}}x$

$y=\sqrt{\frac{3}{10}}x$

e:

$y=-\sqrt{\frac{3}{10}}x$

Es n°81 pag 646

Dato l'iperbole: $9x^2-4y^2=36$, calcolare le coordinate dei fuochi, l'eccentricità e l'equazioni degli asintoti.

L'equazione dell'iperbole è del tipo $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ con i fuochi sull'asse x.

$\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2=1$

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

$a=2$

$b=3$

$c=\sqrt{13}$

20
Le coordinate dei fuochi sono:

$F_1 = (\sqrt{13}, 0)$

$F_2 = (-\sqrt{13}, 0)$

L'eccentricità è:

$e = \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{13}$

L'equazione degli asintoti è:

$y = \frac{3}{2}x$

$y = -\frac{3}{2}x$

Es n° 32 pag 646

Dato l'iperbole: $3x^2 - 4y^2 = 36$, calcolare le coordinate dei fuochi, l'eccentricità e l'equazione degli asintoti:

l'iperbole è del tipo $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ con i fuochi sull'asse x:

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^2 = 1$

$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$

$e = \sqrt{2}$

$b = 3$

$c = \sqrt{11}$

Le coordinate dei fuochi sono:

$F_1 (\sqrt{11}, 0)$

$F_2 (-\sqrt{11}, 0)$

L'eccentricità:

$e = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{22}$

L'equazione degli asintoti:

$y = \frac{3}{2}\sqrt{2}\,x$

$y = -\frac{3}{2}\sqrt{2}\,x$

Es n: 83 pag 645

Scrivere l'equazione dell'Iperbole di semidistanza focale 5 e di
(in questo caso significa come distanza dai vertici)
semiasse trasverso 3.

L'iperbole è del tipo $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$2c=10$

$2a=6$

$b=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

L'equazione dell'iperbole è:

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

Es n: 93 pag 647

Scrivere l'equazione di una iperbole equilatera che passa per il punto (5, 0).

L'iperbole in questione è riferita ai propri assi di simmetria con equazione del tipo $x^2-y^2=a^2$.

Da sottolineare il fatto che il punto (5, 0) rappresenta un vertice dell'ellisse, quindi la semidistanza dei vertici è uguale a 5 e l'equazione è:

$x^2-y^2=25$

Es n: 94 pag 647

Scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti (cioè del tipo $xy=k$) passante per il punto (5, 2).

L'equazione dell'iperbole è del tipo $xy=\frac{1}{2}a^2$ perchè il punto (5, 2) si trova nel primo quadrante. Le coordinate del punto soddisfano l'equazione dell'iperbole:

impongo il passaggio per il punto:

$10=\frac{1}{2}a^2$

$a=\sqrt{20}$

l'equazione dell'iperbole è:

$xy=10$

2)

Es n. 35 pag 647

Calcolare le coordinate dei punti d'intersezione dell'iperbole equilatera $xy = 6$ con il circolo: $x^2+y^2=13$.

Per calcolare le coordinate dei punti d'intersezioni occorre fare il sistema tra le 2 equazioni:

$$\begin{cases} xy = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{y} \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$$

$$\frac{36}{y^2}+y^2=13$$

$$36+y^4=13y^2$$

$$y^4-13y^2+36=0$$

pongo $y^4 = \cancel{6}z^2$

$$z^2-13z+36=0$$

$$z = \frac{13 \pm \sqrt{169-144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} < \begin{matrix} z_1 = 4 \\ z_2 = 9 \end{matrix}$$

$$y^4 = 16 \Rightarrow y = \pm 2$$

$$y^4 = 81 \Rightarrow y = \pm 3$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2 \\ x = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -3 \\ \cancel{x} = -2 \end{cases}$$

i punti di intersezione sono:

$P_1\ (3, 2)$

$P_2\ (2, 3)$

$P_3\ (-3, -2)$

$P_4\ (-2\ -3)$

Es n: 36 pag 647

Calcolare le coordinate dei punti di intersezione dell'iperbole $xy=6$ con la retta $2x+y-8=0$ e l'area del parallelogramma avente per vertici quei punti e i loro simmetrici rispetto all'origine.

Calcolo le coordinate dei punti di intersezione:

$$\begin{cases} xy=6 \Rightarrow x=\frac{6}{y} \\ y=-2x+8 \end{cases}$$

$y=-\frac{12}{y}+8$

$y^2=8y-12$

$y^2-8y+12=0$

$y=4\pm\sqrt{16-12}=4\pm2 < \begin{matrix} y_1=2 \\ y_2=6 \end{matrix}$

$$\begin{cases} y=2 \\ x=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=6 \\ x=1 \end{cases}$$

I punti di intersezione sono:

$P_1(3,2)$

$P_2(1,6)$

I punti a questi simmetrici sono $P_3(-3,-2)$ e $P_4(-1,-6)$.

Calcoliamo l'equazione della retta passante per P_2 e P_3:

$P_2(1,6)$

$P_3(-3,-2)$

$y=mx+n$ eq generale di tutte le rette del piano esclusa quelle parallele all'asse y.

$$\begin{cases} 6=m+n & \text{impongo il passaggio per } P_2 \\ -2=-3m+n & \text{impongo il passaggio per } P_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n=6-m \\ -2=-3m+6-m \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=2 \\ n=4 \end{cases}$$

$y=2x+4$ equazione della retta passante per P_2 e P_3.

Troviamo l'equazione della retta passante per P_1 e perpendicolare a $y=2x+4$

$y=2x+4$. (1)

$$\begin{cases} 2=3m+n & \text{impongo il passaggio per } P_1 \\ 2m=-1 & \text{condizione di perpendicolarità} \end{cases}$$

$m=-\frac{1}{2}$

$n=\frac{7}{2}$

(2) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$ equazione della retta passante per P_1 e perpendicolare alla retta passante per P_2 e P_3

Troviamo le coordinate del punto di intersezione fra la (1) e la (2):

$$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$2x + 4 = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$4x + 8 = -x + 7$$

$$5x = -1$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{5} \\ y = \frac{18}{5} \end{cases}$$

Il punto trovato lo chiamerò Q.

Troviamo ora la misura di P_1Q che è l'altezza del parallelogrammo:

$P_1\ (3,2)$

$Q\ \left(-\frac{1}{5}, \frac{18}{5}\right)$

$$\overline{P_1Q} = \sqrt{\left(3+\frac{1}{5}\right)^2 + \left(2-\frac{18}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(-\frac{8}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{256}{25} - \frac{64}{25}} = \sqrt{\frac{320}{25}} = \sqrt{\frac{64}{5}}$$

Per trovare l'area del parallelogrammo moltiplico il segmento P_1P_4 per l'altezza:

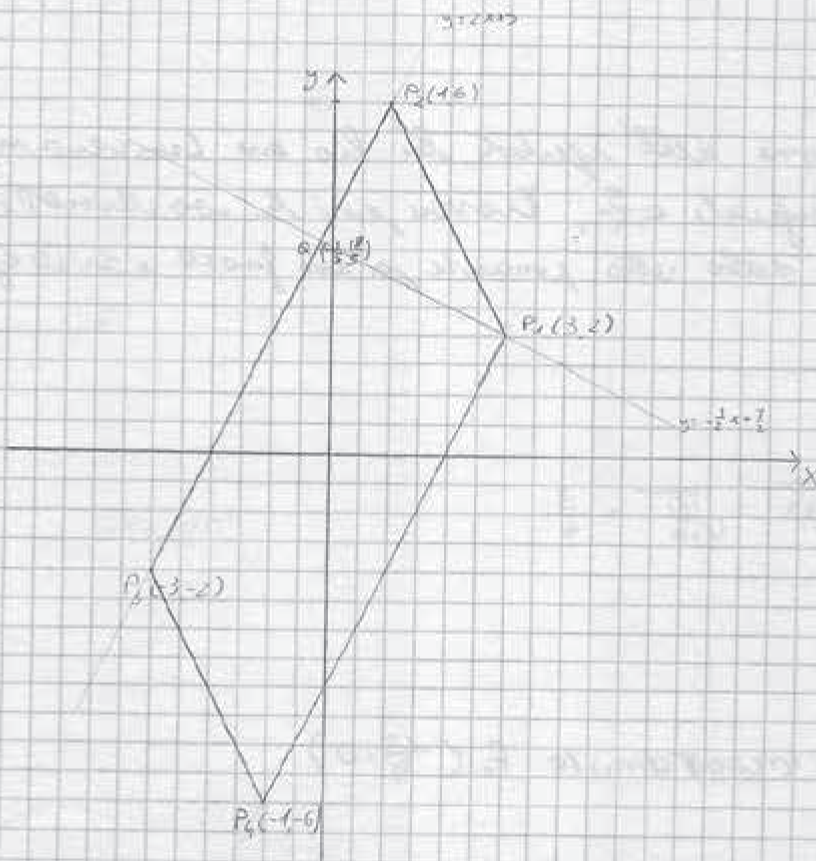
$\overline{P_1P_4} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$

$\overline{P_1Q} = 8\sqrt{\frac{1}{5}}$

Area:

$\sqrt{80} \cdot 8\sqrt{\frac{1}{5}} = 8 \cdot \sqrt{16} = 32$ area del parallelogramma

Figura:



Es n: 84 pag 646

Scrivere l'equazione dell'iperbole di distanza focale 20 e di asse non trasverso lungo 12.

$2c = 20 \Rightarrow c = 10$

$2b = 12 \Rightarrow b = 6$

$a = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$

l'equazione dell'iperbole è:

$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

Es n: 85 pag 646

Nell'equazione dell'iperbole: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, si determini b in modo che l'iperbole passi per il punto $(5, -\frac{3}{4})$.

impongo il passaggio per il punto:

$\frac{25}{16} - \frac{\frac{9}{16}}{b^2} = 1$

$25b^2 - 9 = 16b^2$

$9b^2 = 9$

$b = 1$

L'equazione è:

$\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$

Es n: 81 pag 647

Scrivere l'equazione dell'iperbole che ha asse trasverso uguale a 6 e l'eccentricità uguale a $\frac{5}{4}$; trovare poi le coordinate dei punti in cui essa è tagliata dalla retta passante per un fuoco e di coefficiente angolare 1

$2a = 6 \Rightarrow a = 3$

$\frac{c}{a} = \frac{5}{4} \Rightarrow c = \frac{15}{4}$

$b = \sqrt{\frac{225}{16} - 9} = \sqrt{\frac{225 - 144}{16}} = \sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4}$

L'equazione è:

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{\frac{81}{16}} = 1$

Uno dei fuochi ha le coordinate $F_1(\frac{15}{4}, 0)$

Es n: 37 pag 648

Scrivere l'equazioni, riferite ai propri asintoti, delle seguenti iperbole equilatere:

(1) $x^2 - y^2 = 1$ (2) $x^2 - y^2 = 16$ (3) $3x^2 - 3y^2 = 4$

L'equazione dell'iperbole (1) sarà:

$xy = \pm\frac{1}{2}$

L'equazione della (2) sarà:

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$

$xy = \pm 8$

L'equazione della (3) sarà:

$\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}y^2 = 1$

$\frac{x^2}{\frac{4}{3}} - \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1$

$xy = \cancel{[illegible]} \pm \frac{2}{3}$

Es n: 329 pag 357 Risolvere la seguente equazione omogenea in senx e cosx

$(2-\sqrt{3})\,\operatorname{sen}x\cos x-\operatorname{sen}^2x=0$

$\operatorname{sen}x\left[(2-\sqrt{3})\cos x-\operatorname{sen}x\right]=0$

$\operatorname{sen}x=0$

$x=k\,180°$

con $k\in\mathbb{Z}$

$(2-\sqrt{3})\cos x-\operatorname{sen}x=0$

divido per $\cos x$ $(x\neq 90°)$

$2-\sqrt{3}-\operatorname{tg}x=0$

$\operatorname{tg}x=2-\sqrt{3}$

$x=k\,180°+15°$

Es n: 354 pag 358 Risolvere la seguente equazione goniometrica:

$\cos^2x-2\cos x+1=0$

l'equazione è di secondo grado nella variabile $\cos x$

$\cos x=1\pm\sqrt{1-1}=1$

$\cos x=1$

$x=2k\,180°$ $(k\,2\pi)$

con $k\in\mathbb{Z}$

Es n: 355 pag 358 Risolvere la seguente equazione goniometrica:

$\cos x=\operatorname{cotg}x$

$\cos x=\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}$

$\cos x=\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x}$

$\cos x\operatorname{sen}x-\cos x=0$

$\cos \cancel{x}(\operatorname{sen}x-1)=0$

$\cos x=0$

$x=2k\,180°\pm 90°$

con $k\in\mathbb{Z}$

$\operatorname{sen}x=1$

$x=k\,180°+(-1)^k\,90°$

con $k\in\mathbb{Z}$

24

Es. n: 359 pag 368 Risolvere la seguente equazione goniometrica

$tg\,x = \sqrt{2}\ sen\,x$

$\frac{sen\,x}{cos\,x} = \sqrt{2}\ sen\,x$

$sen\,x = \sqrt{2}\ sen\,x\ cos\,x$

$\sqrt{2}\ sen\,x\ cos\,x - sen\,x$

$sen\,x\,(\sqrt{2}\ cos\,x - 1)$

$sen\,x = 0$

$x = K\,180°$
con $K \in \mathbb{Z}$

$\sqrt{2}\ cos\,x - 1 = 0$

$cos\,x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$x = 2K\,180° \pm 45°$
con $K \in \mathbb{Z}$

Es. n: 368 pag 369 Risolvere la seguente equazione goniometrica:

$sen\,x - 1 = cos^2 x$

$sen\,x - 1 = 1 - sen^2 x$

$sen^2 x + sen\,x - 2 = 0$

l'equazione è di 2° grado nella variabile sen x:

$sen\,x = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$

$sen\,x = -2$ impossibile

$sen\,x = 1$

$x = K\,180° + (-1)^K\,90°$
con $k \in \mathbb{Z}$

Es. n: 369 pag 369 Risolvere la seguente equazione goniometrica:

$2tg\,x - cotg\,x + 1 = 0$

$2\,tg\,x - \frac{1}{tg\,x} + 1 = 0$

$2\,tg^2 x + tg\,x - 1 = 0$

l'equazione è di 2° grado nella variabile tg x:

$tg\,x = \frac{-1 \pm 3}{4} \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

$tg\,x = -1$

$tg\,x = \frac{1}{2}$

Es n: 373 pag 369. Risolvere la seguente equazione goniometrica:

$$tg\,x + cotg\,x = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$tg\,x + \frac{1}{tg\,x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$tg^2 x + 1 = \frac{4}{3}\sqrt{3}\,tg\,x$$

$$tg^2 x - \frac{4}{3}\sqrt{3}\,tg\,x + 1 = 0$$

$$3tg^2 x - 4\sqrt{3}\,tg\,x + 3 = 0$$

l'equazione è di 2° grado nella variabile $tg\,x$

$$tg\,x = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12-9}}{3} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{3} < \begin{matrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{matrix}$$

$tg\,x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ $\qquad$ $tg\,x = \sqrt{3}$

$x = k\,180° + 30$ $\qquad$ $x = k\,180° + 60°$

con $k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{\text{Esercizio dimostrativo}}$

$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

$x = 30°$

$x = 150°$ perché angoli supplementari

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ x = 2k\,180° + 30° \\ 2)\ x = 2k\,180° + 150° \end{array}\right\} k \in \mathbb{Z} \text{ insieme dei numeri relativi interi}$$

1) x = numero pari $180° + 30°$

2) x = numero pari $180° + 180° - 30°$ = (numero pari $+1$) $180° - 30°$ = numero dispari di $180° - 30°$

generalizzando:

$x = k\,180° + (-1)^k\,30$ con $k \in \mathbb{Z}$

$$\left.\begin{array}{l} k=0 \Rightarrow x = 30° \\ k=1 \Rightarrow x = 150° \end{array}\right\} \text{soluzioni proprie}$$

$$\left.\begin{array}{l} k=2 \Rightarrow x = 390° \\ k=3 \Rightarrow x = 510° \\ k=4 \Rightarrow x = 750° \\ k=-10 \Rightarrow x = -1770 \end{array}\right\} \text{soluzioni improprie}$$

$\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$x = 45° + 2K180° =$ numero pari $180° + 45°$

$x = 180° - 45° + 2K180° = 180°(2+2K) - 45° =$ numero pari $180° - 45°$

generalizzando

$x = 2K180° \pm 45°$

con $K \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

$x = 60°$

$x = 240°$

$x = 2K180° + 60° =$ numero pari $180° + 60°$

$x = 2K180° + 180° + 60° = (2K+1)180° + 60° =$ numero dispari $180° + 60°$.

generalizzando:

$x = K180° + 60°$

con $K \in \mathbb{Z}$.

Esercizio Risolvere la seguente equazione goniometrica:

$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x = 0$

$\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen} x \cos x = 0$

$\operatorname{sen} x (1 - 2\cos x) = 0$

$\operatorname{sen} x = 0$ $\quad$ $1 - 2\cos x = 0$

$x = K180°$ $\quad$ $\cos x = \frac{1}{2}$

con $K \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $x = 2K180° \pm 60°$

con $K \in \mathbb{Z}$

Esercizio Risolvere la seguente equazione goniometrica

$2\operatorname{sen}^2 x - 5\operatorname{sen} x + 2 = 0$

equazione di secondo grado nella variabile $\operatorname{sen} x$:

$\operatorname{sen} x = \frac{5 \pm 3}{4} < \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{matrix}$

$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\operatorname{sen} x = 2$ impossibile

$x = K180° + (-1)^K 30°$
con $K \in \mathbb{Z}$

Se capita:

$\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$

si scrive:

$x = K180° + (-1)^K \arcsin \frac{1}{3}$

Esercizio: Risolvere la seguente equazione goniometrica.

$\operatorname{sen} x - \cos x = 0$

questa equazione si può guardare come se fosse algebricamente a due incognite in $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

Questa è una equazione omogenea in $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ e manca del termine noto.

Dopo aver considerato che $\cos x = 0$ non è soluzione dell'equazione, possiamo dividere per $\cos x$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$x = k180° + 45°$$

$$x = k\pi + \frac{1}{4}\pi$$

Esercizio Risolvere la seguente equazione goniometrica.

$$\begin{cases} 2\operatorname{sen} x - 4\cos x + 2\sqrt{3} + 1 = 0 \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{4\cos x + 2\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\begin{cases} 16\cos^2 x + 1 + 12 - 8\cos x - 16\sqrt{3}\cos x - 4 - 4\sqrt{3} \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$$20\cos^2 x - 2\cos x \; (4 - 8\sqrt{3})\cos x + 9 - 4\sqrt{3}$$

$$\Delta = (4 - 8\sqrt{3})^2 - 20(9 - 4\sqrt{3}) = 16 - 64\sqrt{3} + 192 - 180 + 80\sqrt{3} =$$

$$= 28 + 16\sqrt{3}.$$

$$\cos x = \frac{4 - 8\sqrt{3} \pm 2\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}{20} =$$

$$\cos x = \frac{4 - 8\sqrt{3} \pm 2(2 + \sqrt{3})}{20} = \begin{cases} \dfrac{4 - 8\sqrt{3} - 2(2 + \sqrt{3})}{20} = -\dfrac{1}{2}\sqrt{3} \\ \dfrac{4 - 8\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3}}{20} = \dfrac{8 - 6\sqrt{3}}{20} = \dfrac{4 - 3\sqrt{3}}{10} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} &\begin{cases} x = 150° \\ x = 210° \end{cases} \\ \operatorname{sen} x = -\tfrac{1}{2} &\begin{cases} x = 210° \\ x = -30° = 330° \end{cases} \end{aligned}\right\} x = 210° + 2k180°$$

$[\operatorname{sen}(-30°) = -\operatorname{sen} 30° = \operatorname{sen} 330°]$

Es n: 307 pag 366 risolvere la seguente equazione parametrica

$$\begin{cases} 3\,\text{sen}\,x + \sqrt{3}\cos x = -\sqrt{3} \\ \cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1 \end{cases}$$

$$\text{sen}\,x = -\frac{\sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}}{3}$$

$$\cos^2 x + \frac{3\cos^2 x + 6\cos x + 3}{9} = 1$$

$$9\cos^2 x + 3\cos^2 x + 6\cos x + 3 = 9$$

$$12\cos^2 x + 6\cos x - 6 = 0$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$\cos x = \frac{-1 \pm 3}{4} \left\langle \begin{matrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right.$$

$\cos x = -1$ — $x = 2k\,180° \pm 180°$ — $k \in \mathbb{Z}$ — $\text{sen}\,x = 0$

$\cos x = \frac{1}{2}$ — $x = 2k\,180° \pm 60°$ — $k \in \mathbb{Z}$ — $\text{sen}\,x = \sqrt{3}$

$$\begin{cases} \text{sen}\,x = 0 \left\langle \begin{matrix} x = 0 \\ 180° \end{matrix} \right. \\ \cos x = -1 \left\langle \begin{matrix} 180° \\ 180° \end{matrix} \right. \end{cases} \quad x = 180° + 2k\,180° \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \text{sen}\,x = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \left\langle \begin{matrix} x = 300° \\ x = 240° \end{matrix} \right. \\ \cos x = \frac{1}{2} \left\langle \begin{matrix} 60° \\ 300° \end{matrix} \right. \end{cases} \quad x = 300° + 2k\,180°$$

Es n: 308 NO! Risolvere la seg. eq. goniom.

$$\begin{cases} \text{sen}\,x + (2+\sqrt{3})\cos x - 1 = 0 \\ \cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1 \end{cases}$$

$$\text{sen}\,x = 1 - (2+\sqrt{3})\cos x$$

$$\cos^2 x + \cancel{1} - 2(2+\sqrt{3})\cos x + (7+4\sqrt{3})\cos^2 x = \cancel{1}$$

$$(8+4\sqrt{3})\cos^2 x - 2(2+\sqrt{3})\cos x = 0$$

$$\cos x\,[(8+4\sqrt{3})\cos x - 2(2+\sqrt{3})] = 0$$

$\cos x = 0$

$x = 2k\,180° \pm 90$

$k \in \mathbb{Z}$

$\text{sen}\,x = 1$

$(8+4\sqrt{3})\cos x - 2(2+\sqrt{3}) = 0$

$$\cos x = \frac{2(2+\sqrt{3})}{4(2+\sqrt{3})} = \frac{1}{2}$$

$$x = 2k\frac{\pi}{180} \pm \frac{5}{3}\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2k\,180° \pm \cancel{60°}$$

$k \in \mathbb{Z}$

$\text{sen}\,x = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \Rightarrow x = k\,360° + \frac{5}{3}\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

Es n: 309 pag 356 NO!

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3} \\ \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \end{cases}$$

$\operatorname{sen} x = \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}$

$\cos^2 x + 3\cos^2 x + 6\cos x + 3 = 1$

$4\cos^2 x + 6\cos x + 2 = 0$

$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

$\Delta = 9 - 8 = 1$

$\cos x = \frac{-3 \pm 1}{4} \genfrac{}{}{0pt}{}{-1}{-\frac{1}{2}}$

$\cos x = -1$
$\operatorname{sen} x = 0$

$x = 2k180° \pm 180°$

$k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = -\frac{1}{2}$
$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$x = 2k180° \pm 120°$ o $x =$

$k \in \mathbb{Z}$

Es n: 310 pag 356 NO!

$$\begin{cases} (2+\sqrt{3})\operatorname{sen} x + \cos x = 1 \\ \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \end{cases}$$

$\cos x = -(2+\sqrt{3})\operatorname{sen} x - 1$

$(7+4\sqrt{3})\operatorname{sen}^2 x + 2(2+\sqrt{3})\operatorname{sen} x + \cancel{1} + \operatorname{sen}^2 x = \cancel{1}$

$(8+4\sqrt{3})\operatorname{sen}^2 x + 2(2+\sqrt{3})\operatorname{sen} x = 0$

$\operatorname{sen} x[(8+4\sqrt{3})\operatorname{sen} x + 2(2+\sqrt{3})] = 0$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

$x = k180°$

$k \in \mathbb{Z}$

or

$(8+4\sqrt{3})\operatorname{sen} x + 2(2+\sqrt{3}) = 0$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = -\frac{2\cancel{(2+\sqrt{3})}}{4\cancel{(2+\sqrt{3})}} = -\frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{cases}$$

$\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$

$x = k180° + (-1)^k 330°$

$k \in \mathbb{Z}$

Esercizio: Risolvere la seguente equazione goniometrica

22 $sen^2 x - 4 sen x cos x + 3 cos^2 x = 0$

Nelle variabili senx e cosx questa è una equazione di 2° grado omogenea.

Si divide per $cos^2 x$, dopo ~~aver~~ ~~essersi~~ aver accertato che cos x non soddisfa le equazione.

FRASE FATTA:

siccome $cos x = 0$ non risolve l'equazione, possiamo dividere ~~per~~ ambo i membro per cos x ottenendo una equazione equivalente; quindi viene

$$tg^2 x - 4 tg x + 3 = 0$$

questa è una equazione algebrica di 2° grado nelle variabile tg x;

$$tg x = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 < \begin{matrix} tg_1 x = 1 \\ tg_2 x = 3 \end{matrix}$$

$tg x = 1 \Rightarrow x = k 180° + 45°$

$tg x = 3 \Rightarrow k 180° + arctg 3$

Es n = 330 pag 367 Risolvere la seguente equazione goniometrica

$\sqrt{3}\ sen^2 x - (1 + \sqrt{3}) sen x cos x + cos^2 x = 0$

siccome $cos x = 0$ non risolve l'equazione, possiamo dividere ambo i membri per $cos^2 x$ ottenendo una equazione equivalente:

$$\sqrt{3}\ tg^2 x - (1 + \sqrt{3})\ tg x + 1 = 0$$

questa è una equazione di 2° grado nella variabile tg x:

$$\Delta = (1+\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$tg x = \frac{1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{3} \pm (\sqrt{3} - 1)}{2\sqrt{3}} < \begin{matrix} tg_1 x = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ tg_2 x = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1 \end{matrix}$$

$tg x = 1$

$x = k 180° + 45°$

$x = k\pi + \frac{1}{4}\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

$tg x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$x = k 180° + 30$

$x = k\pi + \frac{1}{6}\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

Es n° 331 pag 367 Risolvere la seguente equazione goniometrica.

$sen^2 x - (\sqrt{3}-1)\, sen\,x \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$

poichè $\cos x = 0$ non risolve l'equazione, posso dividere ambo i membri per $\cos^2 x$ ottenendo una equazione equivalente:

$tg^2 x - (\sqrt{3}-1)\, tg\,x - \sqrt{3} = 0$

questa è una equazione di secondo grado nella variabile $tg\,x$:

$\Delta = (\sqrt{3}-1)^2 + 4\sqrt{3} = 4 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}$

$tg\,x = \frac{(\sqrt{3}-1) \pm \sqrt{(4+2\sqrt{3})}}{2} < \begin{matrix} tg_1\,x = \sqrt{3} \\ tg_2\,x = -1 \end{matrix}$

$tg\,x = -1$ — $tg\,x = \sqrt{3}$

$x = k180° + 135°$ — $x = k180° + 60°$

$k \in \mathbb{Z}$ — $k \in \mathbb{Z}$

Es n° 332 pag 367 Risolvere la seguente equazione goniometrica.

$sen^2 x - 3\, sen\,x \cos x + 2\cos^2 x = 0$

poichè $\cos x = 0$ non risolve l'eq. posso dividere per $\cos^2 x$ ambo i membri ottenendo una eq. equivalente

$tg^2 x - 3\, tg\,x + 2 = 0$

l'equazione è di 2° grado nella variabile $tg\,x$:

$\Delta = 9 - 8 = 1$

$tg\,x = \frac{3 \pm 1}{2} < \begin{matrix} tg_1\,x = 1 \\ tg_2\,x = 2 \end{matrix}$

$tg\,x = 1$ — $tg\,x = 2$

$x = k180° + 45°$ — $x = k180° + arctg\,2$

$x = k\pi + \frac{1}{4}\pi$

con $k \in \mathbb{Z}$

Es n° 333 pag 367 Risolvere la seguente equazione goniometrica.

$sen^2 x - 2\, sen\,x \cos x - \cos^2 x = 0$

poichè $\cos x = 0$ non risolve l'eq. posso dividere ambo i membri per $\cos^2 x$ ottenendo una eq. equivalente

$tg^2 x - 2\, tg\,x - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 1 = 2$

$tg\,x = 1 \pm \sqrt{2} < \begin{matrix} tg_1\,x = 1-\sqrt{2} \\ tg_2\,x = 1+\sqrt{2} \end{matrix}$

$tg\,x = 1 - \sqrt{2}$ — $tg\,x = 1 + \sqrt{2}$

$x =$ — $x = \underset{90°}{\underline{k180°}} + 67°30'$

Es n: 316 pag 366 Risolvere la seguente equazione goniometrica:

$$\begin{cases}(2+\sqrt3)\,sen\,x+\cos x+2+\sqrt3=0\\ \cos^2 x+sen^2 x=1\end{cases}$$

$\cos x=-(2+\sqrt3)-(2+\sqrt3)\,sen\,x$

$(7+4\sqrt3)+2(7+4\sqrt3)\,sen\,x+(7+4\sqrt3)\,sen^2x+sen^2x=1$

$6+4\sqrt3+2(7+4\sqrt3)\,sen\,x+(8+4\sqrt3)\,sen^2x=0$

$(8+4\sqrt3)\,sen^2x+2(7+4\sqrt3)\,sen\,x+6+4\sqrt3=0$

$\frac{\Delta}{4}=(7+4\sqrt3)^2-(8+4\sqrt3)(6+4\sqrt3)=49+56\sqrt3+\cancel{48}-\cancel{48}-24\sqrt3-32\sqrt3-48=1$

$sen\,x=\frac{-7-4\sqrt3\pm1}{8+4\sqrt3}\ \begin{cases}sen_1\,x=-1\\ sen_2\,x=-\frac{3+2\sqrt3}{4+2\sqrt3}=-\frac12\sqrt3\end{cases}$

$sen\,x=-1\begin{cases}x=270°\\ x=-90°\end{cases}$

$\cos x=0\begin{cases}x=90°\\ x=270°\end{cases}$

$x=2k\,180°+270°$ con $k\in\mathbb{Z}$

$sen\,x=-\frac12\sqrt3\begin{cases}x=300\\ x=240\end{cases}$

$\cos x=-\frac12\begin{cases}x=240\\ x=120\end{cases}$

$x=2k\,180°+240°$ con $k\in\mathbb{Z}$

Esercizio n° 339 pag 367 Risolvere la seguente eq. goniometrica

$2\,sen^2x+3\,sen\,x\cos x-\cos^2x=2$

questa è una eq. di 2° grado in seno e coseno non omogenea, ma posso renderla omogenea

$2\,sen^2x+3\,sen\,x\cos x-\cos^2x-2(\cos^2x+sen^2x)=0$

$-3\cos^2x+3\,sen\,x\cos x=0$

$-\cos^2x+sen\,x\cos x=0$

divido per sen^2x, poiché $sen\,x=0$ non risolve l'equazione:

$-\cot^2x+\cot x=0$

$\cot x(1-\cot x)=0$

$\cot x=0$

(1) $x=k\,180°+90°$ $\quad k\in\mathbb{Z}$

$\cot x=1$

(2) $x=k\,180°+45°$

(1) $k=0\Rightarrow x=90°$
$k=1\Rightarrow x=270$ } inutile

$k=0\Rightarrow x=45°$
$k=1\Rightarrow x=225°$ } inutile.

$\boxed{\text{Esercizio}}$: Risolvere la seguente eq. goniometrica:

$sen^2 x + 2\cos^2 x + sen\, x \cos x - 2 = 0$

eq. di 2° grado omogeneizzabile:

$sen^2 x + 2\cos^2 x + sen\, x \cos x - 2(\cos^2 x + sen^2 x) = 0$

$-sen^2 x + sen\, x \cos x = 0$

divido per $\cos^2 x$:

$-tg^2 x + tg\, x = 0$

$tg\, x(-tg\, x + 1) = 0$

per la legge di annullamento del prodotto si ha:

$tg\, x = 0$

$x = k180°$ con $k \in \mathbb{Z}$

$tg\, x = 1$

$x = k180° + 45°$ con $k \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{Esercizio}}$: Risolvere la seguente eq. goniometrica:

$sen\, 5x = \frac{1}{2}$

$5x = k180° + (-1)^k 30°$

$x = k360° + (-1)^k 6°$ con $k \in \mathbb{Z}$

$k = 0 \Rightarrow x = 6°$

$k = 1 \Rightarrow x = 30°$

$k = 2 \Rightarrow x = 78°$

$k = 3 \Rightarrow x = 102°$

$k = 4 \Rightarrow x = 150°$

$k = 5 \Rightarrow x = 172°$

$k = 6 \Rightarrow x = 222°$

$k = 7 \Rightarrow x = 246°$

$k = 8 \Rightarrow x = 294°$

$k = 9 \Rightarrow x = 318°$

29

<u>Es n: 462 pag 375</u> Risolvere la seguente eq goniometrica:

$(\operatorname{sen}x + \cos x)^2 = 2\operatorname{sen}2x$

$\operatorname{sen}^2x + 2\cos x\operatorname{sen}x + \cos^2x - 4\operatorname{sen}x\cos x = 0$

$\operatorname{sen}^2x - 2\cos x\operatorname{sen}x + \cos^2x = 0$

divido per $\cos^2x$:

$tg^2x - 2\,tg\,x + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 1 = 0$

$tg\,x = 1$

$x = k180° + 45°$

<u>Es n: 476 pag 375</u> Risolvere la seguente eq. goniometrica:

$(1-\sqrt{3})\operatorname{sen}x\cos x + (1+\sqrt{3})\cos^2x = 1$

eq di 2° grado in sen x e cos x omogeneizzabile:

$(1-\sqrt{3})\operatorname{sen}x\cos x + (1+\sqrt{3})\cos^2x - \cos^2x - \operatorname{sen}^2x = 0$

$-\operatorname{sen}^2x + (1-\sqrt{3})\operatorname{sen}x\cos x + \sqrt{3}\cos^2x = 0$

$\operatorname{sen}^2x - (1-\sqrt{3})\operatorname{sen}x\cos x - \sqrt{3}\cos^2x = 0$

divido per $\cos^2x$:

$tg^2x - (1-\sqrt{3})\,tg\,x - \sqrt{3} = 0$

$tg\,x = \dfrac{1-\sqrt{3} \pm \sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{1-\sqrt{3} \pm (\sqrt{3}+1)}{2}$ ⟨ $tg_1\,x = -\sqrt{3}$; $tg_2\,x = 1$

$tg\,x = -\sqrt{3}$

$x = k180° + 120°$

$k \in \mathbb{Z}$

$tg\,x = 1$

$x = k180° + 45°$

$k \in \mathbb{Z}$

<u>Esercizio</u>: Risolvere la seg. eq. goniometrica:

$\cos 10x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$10x = 2k180° \pm 30°$

$x = 2k18° \pm 3°$

$(x = 2k18° + 3°)$

$k = 0 \Rightarrow x = 3°$

$k = 1 \Rightarrow x = 39°$

$k = 2 \Rightarrow x = 75°$

$k = 3 \Rightarrow x = 111°$

$k = 4 \Rightarrow x = 147°$

$k = 5 \Rightarrow x = 183°$

$k = 6 \Rightarrow x = 219°$

$k = 7 \Rightarrow x = 255°$

$k = 8 \Rightarrow x = 291°$

$k = 9 \Rightarrow x = 327°$

$(x = 2k18° - 3°)$

~~$k = 0 \Rightarrow x = -3°$~~

$k = 1 \Rightarrow x = 33°$

$k = 2 \Rightarrow x = 69°$

$k = 3 \Rightarrow x = 105°$

$k = 4 \Rightarrow x = 141°$

$k = 5 \Rightarrow x = 177°$

$k = 6 \Rightarrow x = 213°$

$k = 7 \Rightarrow x = 249°$

$k = 8 \Rightarrow x = 285$

$k = 9 \Rightarrow x = 321$

$k = 10 \Rightarrow x = 357$

Esercizio: Risolvere la seg. eq. goniometrica:

$tg\, 6x = 0$

$6x = k\,180°$

$x = k\,30°$

$k=0 \Rightarrow x=0$

$k=1 \Rightarrow x=180°$

$k=2 \Rightarrow x=360°$

Esercizio: Risolvere la seg. eq. goniometrica:

$sen\, 4x = -1$

$4x = k\,180° + (-1)^k\, 270°$

$x = k\,45° + (-1)^k \cdot \frac{135}{2}°$

$k=0 \Rightarrow x = \left(\frac{135}{2}\right)°$

$\cancel{k=1 \Rightarrow x = -\left(\frac{55}{2}\right)°}$

$k=2 \Rightarrow x = \left(\frac{215}{2}\right)°$

$k=3 \Rightarrow x = \left(\frac{135}{2}\right)°$

$k=4 \Rightarrow x = \left(\frac{435}{2}\right)°$

$k=5 \Rightarrow x = \left(\frac{515}{2}\right)°$

$k=6 \Rightarrow x = \left(\frac{675}{2}\right)°$

$k=2 \Rightarrow x = \left(\frac{435}{2}\right)°$

$k=3 \Rightarrow x = \left(\frac{675}{2}\right)°$

Esercizio: Risolvere la seg. eq. goniometrica:

$tg\, 8x = 1$

$8x = k\,180° + 45°$

$x = k\,\frac{45°}{2} + \frac{45}{8}°$

$k=0 \Rightarrow x = \left(\frac{45}{8}\right)°$

$k=1 \Rightarrow x = \left(\frac{225}{8}\right)°$

$k=2 \Rightarrow x = \left(\frac{405}{8}\right)°$

$k=3 \Rightarrow x = \left(\frac{585}{8}\right)°$

$k=4 \Rightarrow x = \left(\frac{765}{8}\right)°$

$k=5 \Rightarrow x = \left(\frac{945}{8}\right)°$

$k=6 \Rightarrow x = \left(\frac{1125}{8}\right)°$

$k=7 \Rightarrow x = \left(\frac{1305}{8}\right)°$

$k=8 \Rightarrow x = \left(\frac{1485}{8}\right)°$

$k=9 \Rightarrow x = \left(\frac{1665}{4}\right)°$

$k=10 \Rightarrow x = \left(\frac{1845}{8}\right)°$

$k=11 \Rightarrow x = \left(\frac{2025}{8}\right)°$

$k=12 \Rightarrow x = \left(\frac{2205}{8}\right)°$

$k=13 \Rightarrow x = \left(\frac{2385}{8}\right)°$

$k=14 \Rightarrow x = \left(\frac{2565}{8}\right)°$

$k=15 \Rightarrow x = \left(\frac{2745}{8}\right)°$

$\cancel{k=16 \Rightarrow x = \left(\frac{2365}{8}\right)°}$

Esercizio: discutere il seguente sistema parametrico goniometrico:

$$\begin{cases} 3\,\mathrm{sen}^2 x - 2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x\cos x - 3\cos^2 x + 3k = 0 \quad (1) \\ 0 < x < \frac{1}{3}\pi \end{cases}$$

$(3+3k)\,\mathrm{sen}^2 x - 2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x\cos x + (3k-3)\cos^2 x = 0$

$(3k+3)\,\mathrm{sen}^2 x - 2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x\cos x + (3k-3)\cos^2 x = 0$

se è $k \neq -1$ non può esistere un angolo x che annulla il coseno e nello stesso tempo risolve l'equazione (perché se esistesse esso annullerebbe anche il seno) e allora dividendo ambo i membri dell'equazione per $\cos^2 x$ otteniamo una equazione equivalente alla data.

$$\begin{cases} (3k+3)\,\mathrm{tg}^2 x - 2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x + (3k-3) = 0 \quad (2) \\ 0 \leq \mathrm{tg}\,x \leq \sqrt{3} \end{cases}$$

$\frac{1}{4}\Delta = 3 - 9k^2 + 9 = 12 - 9k^2 \geq 0$ per $-\frac{2}{3}\sqrt{3} \leq k \leq \frac{2}{3}\sqrt{3}$

$\Delta \geq 0$ per $-\frac{2}{3}\sqrt{3} \leq k \leq \frac{2}{3}\sqrt{3}$

$A = 3k+3 \geq 0$ per $k \geq -1$

$B = -2\sqrt{3} < 0 \ \forall k$

$C = 3k-3 > 0$ per $k > 1$

$f(\sqrt{3}) = 9k + 9 - 6 + 3k - 3 = 12k \geq 0$ per $k \geq 0$

$$-\frac{B}{2A} - \sqrt{3} > 0$$

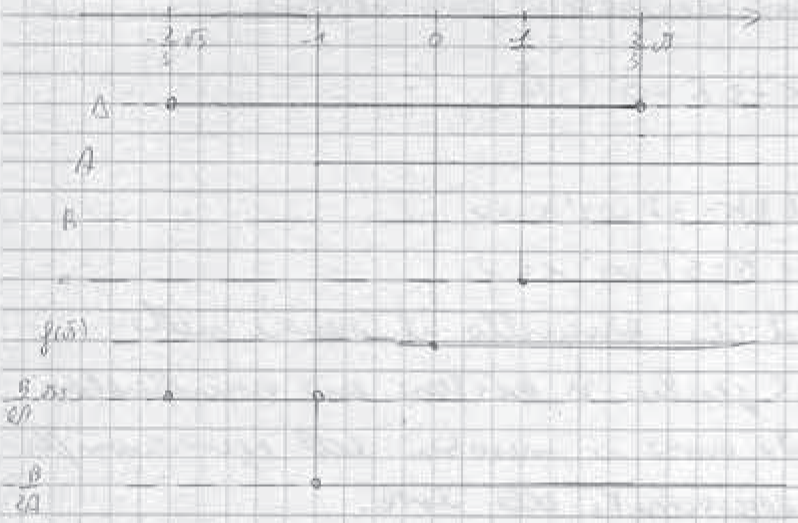
$$\frac{\sqrt{3}}{3k+3} - \sqrt{3} > 0$$

$$\frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{3}k - 3\sqrt{3}}{3k+3} > 0$$

$$\frac{-2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}k}{3k+3} > 0$$

$$\sqrt{3}\,\frac{-3k-2}{3k+3} > 0 \quad \text{per } -1 < k < -\frac{2}{3}.$$

$-\frac{B}{2A} - \sqrt{3} > 0$ per $-1 < k < -\frac{2}{3}$



1° caso) $K < -\frac{2}{3}\sqrt{3}$

2° caso) $K = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$ $\quad \Delta = 0 \Rightarrow \exists\, tg_1\; x = tg_2\, x = -\frac{B}{A} = \frac{\sqrt{3}}{3K+3} < 0.$

Il sistema non ha soluzioni

3° caso) $-\frac{2}{3}\sqrt{3} < K < -1 \quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in R$

$$\left.\begin{array}{l} A<0 \\ B<0 \\ C<0 \end{array}\right\} \; x_1 < 0 \text{ e } x_2 < 0$$

Il problema non ha soluzioni.

4° caso) $K = -1$

In questo caso dobbiamo rifarci alla equazione data (1) poiché essa non equivale più a quella derivata (2) che diventa:

$$-2\sqrt{3}\,\text{sen}\,x \cos x - 6\cos^2 x = 0$$

$$\cos x\,(-2\sqrt{3}\,\text{sen}\,x - 6\cos x) = 0$$

$$\cos x = 0 \left< \begin{array}{l} x = 90° \\ x = 270° \end{array} \right. \quad \text{non risolve}$$

~~Il sistema~~

$$-\sqrt{3}\,\text{sen}\,x - 3\cos x$$

$$\sqrt{3}\; tg\, x + 3 = 0$$

$$tg\, x = -\frac{3}{3}\sqrt{3} = -\sqrt{3} \qquad \text{non risolve}$$

5° caso) $-1 < K < 0 \quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in R$

$$\left.\begin{array}{l} A>0 \\ B<0 \\ C<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{"} x_1 > 0 \text{ e } x_2 < 0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(\sqrt{3})<0 \\ A>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{"}\sqrt{3}\text{" è interno all'intervallo delle radici}$$

Il sistema non ha soluzioni.

31

6° caso) $K=0$ $\quad f(\sqrt{3})=0 \Rightarrow \operatorname{tg} x=\sqrt{3}$ e $\operatorname{tg} x = -\frac{B}{A} - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3K+3} - \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} = -2\sqrt{3} < 0.$

Il sistema ha una sola soluzione.

7° caso) $0<K<1$ $\quad \Delta>0 \Rightarrow \exists \operatorname{tg}_1 x \neq \operatorname{tg}_2 x \in R$

$$\left.\begin{array}{l} A>0 \\ B<0 \\ C<0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1>0 \text{ e } x_2<0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(\sqrt{3})>0 \\ A>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{"}\sqrt{3}\text{" è esterno all'intervallo delle radici}$$

Il sistema ha una sola soluzione.

8° caso) $K=1$ $\quad C=0 \Rightarrow 6\operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0$

$\operatorname{tg} x = 0 \qquad x = K\cdot 180°$

$\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}\sqrt{3} \qquad x = K\cdot 180° + 30°$

Il sistema ha due soluzioni

9° caso) $1<K<\frac{2}{3}\sqrt{3}$ $\quad \Delta>0 \Rightarrow \exists \operatorname{tg}_1 x \neq \operatorname{tg}_2 x \in R$

$$\left.\begin{array}{l} A>0 \\ B<0 \\ C>0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1>0 \text{ e } x_2>0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(\sqrt{3})>0 \\ A>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{"}\sqrt{3}\text{" è esterno all'intervallo delle radici.}$$

Il sistema ha due soluzioni

10° caso) $K=\frac{2}{3}\sqrt{3}$. $\quad \Delta=0 \Rightarrow \exists \operatorname{tg}_1 x = \operatorname{tg}_2 x = -\frac{B}{A} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3}$

Il sistema ha due soluzioni coincidenti.

11° caso) $K>\frac{2}{3}\sqrt{3}$ $\quad \Delta<0$

Il sistema non ha soluzioni perché le radici non sono reali.

Es n = 45 pag 216 Discutere il seg. sistema goniometrico parametrico:

$$\begin{cases} 2k\cos^2 x + 2k\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x\cos x + k - 3 = 0 \\ k > 0 \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

l'equazione non è omogenea, ma può essere resa così; infatti posso moltiplicare $k-3$ per $\cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x$:

$$2k\cos^2 x + 2k\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x\cos x + (k-3)(\cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x) = 0$$

$$3k\cos^2 x - 3\cos^2 x + 2k\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x\cos x + (k-3)\mathrm{sen}^2 x = 0$$

$$(3k-3)\cos^2 x + 2k\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x\cos x + (k-3)\mathrm{sen}^2 x = 0$$

se è $k \ne 3$ non può esistere un angolo α che annulla il coseno e nello stesso tempo risolve l'equazione (perché se esistesse uno annullerebbe anche il seno) e allora dividendo ambo i membri dell'equazione per $\cos^2 x$ otteniamo una equazione equivalente alla data.

$$\begin{cases} (k-3)\,\mathrm{tg}^2 x + 2k\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x + 3k - 3 = 0 \\ k > 0 \qquad \cancel{0 \le x \le \frac{\pi}{2}} \qquad \mathrm{tg}\,x \ge 0 \end{cases}$$

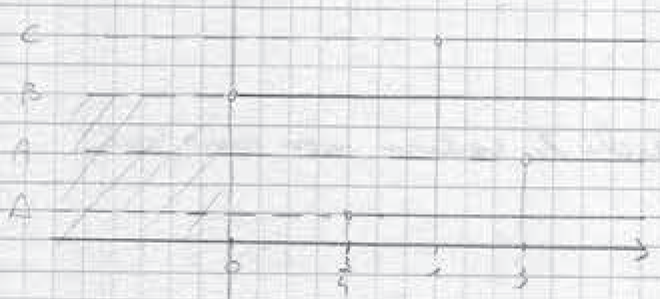
$$\frac{1}{4}\Delta = 3k^2 + (3-k)(3k-3) = \cancel{3k^2} + 9k - \cancel{3k^2} - 9 + 3k = 12k - 9 \ge 0 \text{ per } k \ge \frac{3}{4}$$

$\Delta \ge 0$ per $k \ge \frac{3}{4}$

$A = k - 3 > 0$ per $k > 3$

$B = 2k\sqrt{3} > 0$ per $k > 0$

$C = 3k - 3 > 0$ per $k > 1$



1° caso) $0 < k < \frac{3}{4}$ $\quad \Delta < 0$

Il sistema non ha soluzioni perché le radici non sono reali.

2° caso) $k = \frac{3}{4}$ $\quad \Delta = 0 \Rightarrow \exists\ \mathrm{tg}_1 x = \mathrm{tg}_2 x = -\frac{B}{2A} = \frac{k\sqrt{3}}{k-3} = \frac{\frac{3}{4}\sqrt{3}}{\frac{3}{4}-3} = +\frac{3}{4}\sqrt{3}\cdot\frac{4}{9} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

Il sistema ha due soluzioni coincidenti.

3° caso) $\frac{3}{4} < k < 1$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\ \mathrm{tg}_1 x, \mathrm{tg}_2 x \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{matrix} A < 0 \\ B > 0 \\ C < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathrm{tg}_1 x > 0\ \mathrm{tg}_2 x > 0$$

Il sistema ha due soluzioni.

4° caso) $K=1$ $\quad C=0 \Rightarrow (K-3)\,tg^2x + 2K\sqrt{3}\,tg\,x = 0$

$$-2\,tg^2x + 2\sqrt{3}\,tg\,x = 0$$

$$tg\,x = 0 \Rightarrow x = 0° \ (rad.)$$

$$tg\,x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

Il sistema ha due soluzioni.

5° caso) $1<K<3$ $\quad \Delta>0 \Rightarrow \exists\, tg\,x_1 \neq tg\,x_2 \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} A<0 \\ B>0 \\ C>0 \end{array}\right\} \Rightarrow tg\,x_1 > 0 \quad tg\,x_2 < 0$$

Il sistema ha una sola soluzione.

6° caso) $K=3$.

In questo caso dobbiamo ritornare alla equazione data perché essa non equivale più alla "derivata" che tieneva:

$$6\cos^2x + 6\sqrt{3}\,sen\,x\cos x = 0$$

$$\cos x\,(\cos x + \sqrt{3}\,sen\,x) = 0$$

$$\cos x = 0 \begin{cases} x = 90° = \frac{\pi}{2} \\ x = 270° \quad \text{non risolve} \end{cases}$$

$$\cos x + \sqrt{3}\,sen\,x = 0$$

$$1 + \sqrt{3}\,tg\,x = 0$$

$$tg\,x = -\frac{1}{3}\sqrt{3} \qquad \text{non risolve}$$

Il sistema ha una sola soluzione data dal limite superiore

7° caso) $K>0$ $\quad \Delta>0 \Rightarrow \exists\, tg\,x_1 \neq tg\,x_2 \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} A>0 \\ B>0 \\ C>0 \end{array}\right\} \Rightarrow tg\,x_1 < 0 \quad tg\,x_2 < 0$$

Il sistema non ha soluzioni.

Es n: 47 pag 416 Discutere il seg. sistema goniometrico parametrico:

$$\begin{cases} 4\cos^2 x + 2\sin x\cos x - k = 0 \\ k>0 \quad 0<x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\cos^2 x + 2\sin x\cos x - k(\cos^2 x+\sin^2 x) = 0 \\ k>0 \quad 0<x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$-k\sin^2 x + 2\sin x\cos x + 4\cos^2 x - k\cos^2 x = 0$$

$$k\sin^2 x - 2\sin x\cos x + (k-4)\cos^2 x = 0$$

se è $k\neq 0$ non può esistere un angolo α che annullo il coseno e nello stesso tempo risolve l'equazione e allora dividendo ambo i membri dell'equazione per $\cos^2 x$ ottengo una equazione equivalente alla data.

$$\begin{cases} k\,tg^2 x - 2\,tg\,x + k - 4 = 0 \\ k>0 \quad tg\,x>0\end{cases}$$

$\frac{1}{4}\Delta = 1-k(k-4) = 1-k^2+4k \geq 0$ per $k^2-4k-1\leq 0$.

$k = 2\pm\sqrt{4+1} = \begin{cases}2-\sqrt5\\2+\sqrt5\end{cases}$

$\Delta\geq 0$ per $2-\sqrt5\leq k\leq 2+\sqrt5$ $(0<k\leq 2+\sqrt5)$

$A = k>0$

$B = -2<0\ \forall k$

$C = k-4>0$ per $k>4$

1° caso) $0<k<4$ $\Delta>0 \Rightarrow \exists\ tg_1 x \neq tg_2 x \in \mathbb{R}$

$$\begin{rcases} A>0 \\ B<0 \\ C<0\end{rcases} \Rightarrow x_1>0 \quad x_2<0 \quad |x_1|>|x_2|$$

Il sistema ha una sola soluzione.

2° caso) $k=4$ $C=0 \Rightarrow k\,tg^2x - 2\,tg\,x = 0$

$4\,tg^2 x - 2\,tg\,x = 0$

$tg\,x(2\,tg\,x - 1)$

$tg\,x = 0 \Rightarrow x = 0$ non risolve

$2\,tg\,x - 1 = 0$

$tg\,x = \frac{1}{2}$

Il sistema ha una sola soluzione.

3° caso) $4 < k < 2+\sqrt{5}$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists \; tg_1 x \neq tg_2 x \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} A > 0 \\ B < 0 \\ C > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 > 0 \quad x_2 > 2$$

Il sistema ha due soluzioni.

4° caso) $k = 2+\sqrt{5}$ $\quad \Delta = 0 \Rightarrow \exists \; tg_1 x = tg_2 x = -\dfrac{B}{2A} = \dfrac{1}{2+\sqrt{5}}$

Il sistema ha due soluzioni coincidenti.

5° caso) $k > 2+\sqrt{5}$ $\quad \Delta < 0$

Il sistema non soluzioni perché le radici non sono reali.

Esercizio: Risolvere la seguente equazione goniometrica:

$\operatorname{sen} x + (2+\sqrt{3}) \cos x - 1 = 0$

eq completa.

Applico le formule parametriche:

pongo $tg \frac{x}{2} = t$

$$\frac{2t}{1+t^2} + (2+\sqrt{3}) \frac{1-t^2}{1+t^2} - 1 = 0$$

$$2t + 2 - 2t^2 + \sqrt{3} - \sqrt{3}\,t^2 - 1 - t^2 = 0$$

$$-3t^2 - \sqrt{3}\,t^2 + 2t + 1 + \sqrt{3} = 0$$

$$(3+\sqrt{3})t^2 - 2t - 1 - \sqrt{3} = 0$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1 + (3+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}}{3+\sqrt{3}} = \frac{1 \pm \sqrt{7+4\sqrt{3}}}{3+\sqrt{3}} = \frac{1 \pm (2+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}} \quad t_1 = -\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3} \quad t_2 = 1$$

$tg \frac{x}{2} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

$\frac{x}{2} = k\,180^\circ + 150^\circ$

$x = 2k\,180^\circ + 300^\circ \quad$ con $k \in \mathbb{Z}$

$tg \frac{x}{2} = 1$

$\frac{x}{2} = k\,180^\circ + 45^\circ$

$x = 2k\,180^\circ + 90^\circ \quad$ con $k \in \mathbb{Z}$

Esercizio 311 pag 360 Risolvere la seguente eq. goniometrica:

$\operatorname{sen} x - \cos x = 1$ eq. lineare completa in seno e in coseno

Applico le formule parametriche:

pongo $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$

$$\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$$

$$2t - 1 + t^2 = 1 + t^2$$

$$2t = 2$$

$$t = 1$$

Poiché l'equazione in t si è abbassata di grado, una soluzione dell'eq data è

$\cos x = 0$

$x = 2k180° + 180°$ con $k \in \mathbb{Z}$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$$

$$\frac{x}{2} = k180° + 45°$$

$$x = 2k180° + 90°$$

Col sistema

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x - \cos x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \cos x + 1 \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$$\cos^2 x + 2\cos x + \cancel{1} + \cos^2 x - \cancel{1} = 0$$

$$\cos^2 x + \cos x = 0$$

$\cos x(\cos x + 1) = 0$ per la legge di annullamento del prodotto si ha:

$\cos x = 0 \begin{cases} x = 90° \\ x = 270° \end{cases}$

$\operatorname{sen} x = 1 \begin{cases} x = 90° \\ x = 90° \end{cases}$

$x = 2k180° + 90°$ con $k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = -1 \begin{cases} x = 180° \\ x = 180° \end{cases}$

$\operatorname{sen} x = 0 \begin{cases} x = 0° \\ x = 180° \end{cases}$

$x = 2k180° + 180°$ con $k \in \mathbb{Z}$

Esercizio Risolvere la seguente eq goniometrica.

$\operatorname{sen} x + \cos x + 1 = 0$ eq lineare completa in seno e coseno.

pongo $tg \frac{x}{2} = t$

$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1 = 0$

$2t + 1 - \cancel{t^2} + 1 + \cancel{t^2} = 0$

$t = -1$

$tg \frac{x}{2} = -1$

$\frac{x}{2} = k 180° + 135°$

$x = 2k 180° + 270°$ con $k \in \mathbb{Z}$

Inoltre, essendo l'eq. in t di primo grado io so che un'altra sol. è

$x = 2k 180° + 180°$.

verifico:

$\operatorname{sen} 180° = 0$

$\cos 180° = -1$

e quindi l'equazione è risolta anche da $\cos x = 0$

Es n=312 pag 360 Risolvere la seguente equazione goniometrica

$2 \operatorname{sen} x - 3 \cos x = 2$ eq lineare completa in seno e coseno.

Applico le formule parametriche:

pongo $tg \frac{x}{2} = t$

$2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - 3 \frac{1-t^2}{1+t^2} = 2$

$4t - 3 + 3t^2 = 2 + 2t^2$

$t^2 + 4t - 5 = 0$

$t = -2 \pm 3 <$ $t_1 = -5$, $t_2 = 1$

$tg \frac{x}{2} = +1$

$\frac{x}{2} = k 180° + 45°$

$x = 2k 180° + 90°$ con $k \in \mathbb{Z}$

$tg \frac{x}{2} = 5$

$\frac{x}{2} = k 180° + arctg -5$

$x = 2k 180° + 2 arctg -5$

Col sistema:

$$\begin{cases} 2\,sen\,x - 3\cos x = 2 \Rightarrow sen\,x = \frac{3\cos x + 2}{2} \\ sen^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$$\frac{9\cos^2 x + 12\cos x + 4}{4} + \cos^2 x = 1$$

$$9\cos^2 x + 12\cos x + \cancel{4} + 4\cos^2 x - \cancel{4} = 0$$

$$13\cos^2 x + 12\cos x = 0$$

$$\cos x(13\cos x + 12) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos x = 0 \begin{cases} x = 90^\circ \\ x = 270^\circ \end{cases} \\ sen\,x = 1 \begin{cases} x = 90^\circ \\ x = 90^\circ \end{cases} \end{array}\right\} x = 2k180^\circ + 90^\circ$$

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{12}{13} \rightarrow x = \arccos -\frac{12}{13} \\ sen\,x = \frac{10}{13} \rightarrow x = \arcsin \frac{10}{13} \end{cases}$$

<u>Es n. 313 pag 366</u> Risolvere la seg. eq. goniometrica:

$2\,sen\,x - \cos x - 2 = 0$ eq. lineare completa in seno e coseno

Applico le formule parametriche:

pongo $tg\,\frac{x}{2} = t$

$$2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} - 2 = 0$$

$$4t + t^2 - 1 - 2t^2 - 2 = 0$$

$$-t^2 + 4t - 3 = 0$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$t = 2 \pm 1 \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 3 \end{cases}$$

$$tg\,\frac{x}{2} = 1$$

$$\frac{x}{2} = k180^\circ + 45^\circ$$

$$x = 2k180^\circ + 90^\circ$$

~~Col~~ $tg\,\frac{x}{2} = 3$

$$x = 2k180^\circ + 2\,arctg\,3$$

55 Col sistema

$$\begin{cases} 2\,\text{sen}\,x - \cos x - 2 = 0 \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$\cos x = 2\,\text{sen}\,x - 2$

$\text{sen}^2 x + 4\,\text{sen}^2 x - 8\,\text{sen}\,x + 4 = 1$

$5\,\text{sen}^2 x - 8\,\text{sen}\,x + 3 = 0$

$\Delta = 16 - 15 = 1$

$\text{sen}\,x = \dfrac{4 \pm 1}{5} < \begin{matrix} \text{sen}_1 x = \frac{3}{5} \\ \text{sen}_2 x = 1 \end{matrix}$

$$\left.\begin{matrix} \text{sen}\,x = 1 < \begin{matrix} x = 90° \\ x = 90° \end{matrix} \\ \cos x = 0 < \begin{matrix} x = 90° \\ x = 270° \end{matrix} \end{matrix}\right\} x = 2k\,180° + 90° \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \text{sen}\,x = \frac{3}{5} \rightarrow x = \text{arcsen}\,\frac{3}{5} \\ \cos x = \frac{4}{5} \rightarrow x = \text{arccos}\,\frac{4}{5} \end{cases}$$

Es n° 317 pag 350 Risolvere la seg. eq. goniometrica.

$\text{sen}\,x + (2+\sqrt{3})\cos x + 2 + \sqrt{3} = 0$ eq. lineare completa in seno e coseno.

Applico le formule parametriche:

pongo $\text{tg}\,\frac{x}{2} = t$

$\dfrac{2t}{1+t^2} + (2+\sqrt{3}) \cdot \dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 2 + \sqrt{3} = 0$

$2t + 2 - \cancel{2t^2} + \sqrt{3} - \cancel{\sqrt{3}t^2} + 2 + \cancel{2t^2} + \sqrt{3} + \cancel{\sqrt{3}t^2} = 0$

$2t + 4 + 2\sqrt{3} = 0$

$t = -2 - \sqrt{3}$

$t = -(2+\sqrt{3})$

Poiché l'eq. in t si è abbassata di grado, una soluzione è anche $\cos x = 0$.

$x = 2k\,180° + 180°$ con $k \in \mathbb{Z}$

$\text{tg}\,\frac{x}{2} = -(2+\sqrt{3})$

$\frac{x}{2} = k\,180° + 105°$

$x = 2k\,180° + 210°$ con $k \in \mathbb{Z}$

<u>Es n: 318 pag 366</u> Risolvere la seg eq. parametrica

$(2-\sqrt{3})\,\text{sen}\,x + \cos x - 2 + \sqrt{3} = 0$

Applico le formule parametriche:

pongo $\text{tg}\frac{x}{2} = t$

$$(2-\sqrt{3})\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + \sqrt{3} - 2 = 0$$

$$4t - 2\sqrt{3}t + 1 - t^2 + \sqrt{3} + \sqrt{3}t^2 - 2 - 2t^2 = 0$$

$$-3t^2 + \sqrt{3}t^2 - \sqrt{3} + 4t - 1 = 0$$

$$(\sqrt{3}-3)t^2 + 4t - \sqrt{3} - 1 = 0$$

$$(3-\sqrt{3})t^2 - 4t + \sqrt{3} + 1 = 0$$

$$\frac{1}{4}\Delta = 4 + (\sqrt{3}-3)(\sqrt{3}+1) = 4 + 3 + \sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 3 = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4-2\sqrt{3}}}{3-\sqrt{3}} = \frac{2 \pm (\sqrt{3}-1)}{3-\sqrt{3}} \; < \; \begin{array}{l} t_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = 1 \\ t_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \end{array}$$

$\text{tg}\frac{x}{2} = 1$

$\frac{x}{2} = k\,180^\circ + 45^\circ$

$x = 2k\,180^\circ + 90^\circ$ con $k \in \mathbb{Z}$

<u>Es n: 81 pag 342</u> Calcolare:

$$\text{sen}\,22^\circ 30' = \text{sen}\frac{45^\circ}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

<u>Es n: 82 pag 342</u> Calcolare:

$$\cos 22^\circ 30' = \cos\frac{45^\circ}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

<u>Es n: 83 pag 342</u> Calcolare:

$$\text{tg}\,22^\circ 30' = \text{tg}\frac{45^\circ}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} =$$

$$\sqrt{\frac{6-4\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3+1}{2}} - \sqrt{\frac{3-1}{2}} = \sqrt{2} - 1$$

<u>Es n: 84 pag 342</u> Calcolare:

$$\text{sen}\,105^\circ = \text{sen}\frac{210^\circ}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos 210^\circ}{2}} = +\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

<u>Es n: 85 pag 342</u>

$$\cos 105^\circ = \cos\frac{210^\circ}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos 210^\circ}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}} = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Es n: 86 pag 342 Calcolare

$$tg\,105^\circ = tg\frac{210^\circ}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos 210}{1+\cos 210}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}} = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{2-\sqrt{3}}} = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$$

$$-\sqrt{7+4\sqrt{3}} = -\left(\sqrt{\frac{7+1}{2}}+\sqrt{\frac{7-1}{2}}\right) = -(2+\sqrt{3})$$

Es n: 87 pag 342 Calcolare:

$$sen\,15^\circ = sen\frac{30^\circ}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Es n: 88 pag 342 Calcolare:

$$\cos 15^\circ = \cos\frac{30^\circ}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Es n: 83 pag 342 Calcolare:

$$tg\,15^\circ = tg\frac{30^\circ}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = 2+\sqrt{3}$$

Esercizio: Calcolare le funzioni trigonometriche di

30°

inteso come $\frac{60^\circ}{2}$:

$$sen\,30^\circ = +\sqrt{\frac{1-\cos 60^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = +\sqrt{\frac{1+\cos 60^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$tg\,30^\circ = +\sqrt{\frac{1-\cos 60^\circ}{1+\cos 60^\circ}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Esercizio Risolvere la seg eq. goniometrica

$sen^2 x - 3\,sen\,x\cos x + 2 = 0$

$sen^2 x - 3\,sen\,x\cos x + 2(\cos^2 x + sen^2 x) = 0$

$3\,sen^2 x - 3\,sen\,x\cos x + 2\cos^2 x = 0$

posso dividere per $\cos^2 x$ poiché $\cos x = 0$ non è una soluzione dell'equazione.

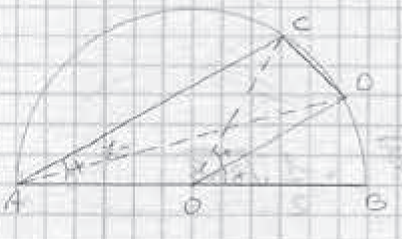
$3\,tg^2 x - 3\,tg\,x + 2 = 0$

$\Delta = 9 - 24 < 0$

l'eq non ha soluzioni.

Es n° 104 pag 424 Problema: è data una semicirconferenza il cui diametro AB misura $2r$. Tracciare una corda AC in modo che, detto D l'estremo del raggio parallelo alla corda, si abbia:

$$\overline{AC}+\overline{CD}=2kr$$



pongo $C\hat{A}B = x$

$0 \le x \le 90°$

$\overline{AC} = 2r\cos x$

ACD è un triangolo inscritto

$\frac{CD}{\operatorname{sen} C\hat{A}D} = 2r$ (teorema dei seni)

$CD = 2r \cdot \operatorname{sen} C\hat{A}D = 2r \operatorname{sen}\frac{1}{2}x$

$$\begin{cases} 2r\cos x + 2r\operatorname{sen}\frac{1}{2}x - 2kr = 0 \\ 0 \le x \le 90° \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x + \operatorname{sen}\frac{1}{2}x - k = 0 \\ \cancel{0 \le x \le 90°} \quad 0 \le \operatorname{sen}\frac{1}{2}x \le \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{cases}$$

$\cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + \operatorname{sen}\frac{x}{2} - k = 0$

$1 - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + \operatorname{sen}\frac{x}{2} - k = 0$

$-2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + \operatorname{sen}\frac{x}{2} + 1 - k = 0$

$$\begin{cases} 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}\frac{x}{2} + k - 1 = 0 \\ \cancel{0 \le x \le 90°} \quad 0 \le \operatorname{sen}\frac{x}{2} \le \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{cases}$$

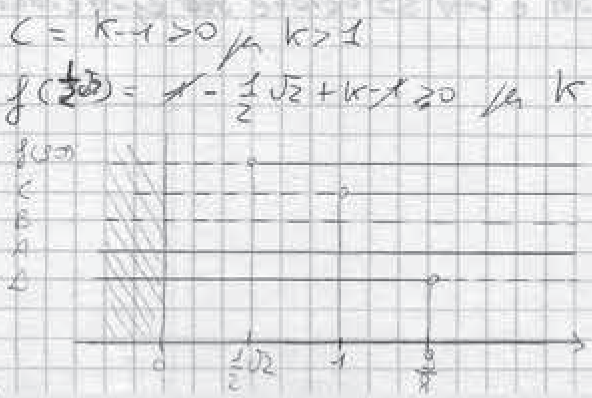
$\Delta = 1 - 8k + 8 \ge 0$ per $k \le \frac{9}{8}$

$A = 2 > 0 \ \forall k$

$B = -1 < 0 \ \forall k$

$C = k - 1 > 0$ per $k > 1$

$f(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \cancel{1} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + k - \cancel{1} \ge 0$ per $k \ge \frac{1}{2}\sqrt{2}$



37

1° caso) $K < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in R$

$\left.\begin{matrix} A>0 \\ B<0 \\ C<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \not\exists \quad x_1 > 0 \text{ et } x_2 < 0$

$\left.\begin{matrix} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) < 0 \\ A > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ "$\frac{1}{2}\sqrt{2}$" è interno all'intervallo delle radici

$x_1 \quad 0 \quad \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad x_2$

Il problema non ha soluzioni

2° caso) $K = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\quad f\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 0 \Rightarrow \text{sen}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ et $\text{sen}\,x_2 = -\frac{B}{A} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ NO

$\frac{x}{2} = 45° \Rightarrow x = 90°$

Il problema ha una sola soluzione

3° caso) $\frac{1}{2}\sqrt{2} < K < 1$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in R$

$\left.\begin{matrix} A>0 \\ B<0 \\ C<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_1 > 0 \text{ et } x_2 < 0$

$\left.\begin{matrix} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) > 0 \\ A > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ "$\frac{1}{2}\sqrt{2}$" è esterno all'intervallo delle radici

$\text{sen}\,x_1 \quad 0 \quad \text{sen}\,x_2 \quad 90°$

Il problema ha 1 sola soluzione.

4° caso) $K = 1$ $\quad C = 0 \Rightarrow 2\,\text{sen}^2\frac{x}{2} - \text{sen}\frac{x}{2} = 0$

$\text{sen}\frac{x}{2}\left(2\,\text{sen}\frac{x}{2} - 1\right) = 0$

$\text{sen}\frac{x}{2} = 0$

$\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0$

$\text{sen}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{x}{2} = 30 \Rightarrow x = 60$

Il problema ha due soluzioni

5° caso) $1 < K < \frac{9}{8}$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in R$

$\left.\begin{matrix} A>0 \\ B<0 \\ C>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0$

$\left.\begin{matrix} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) > 0 \\ A > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ "$\frac{1}{2}\sqrt{2}$" è esterno all'intervallo delle radici

$0 \quad \text{sen}\,x_1 \quad \text{sen}\,x_2 \quad 90°$

Il problema ha due soluzioni.

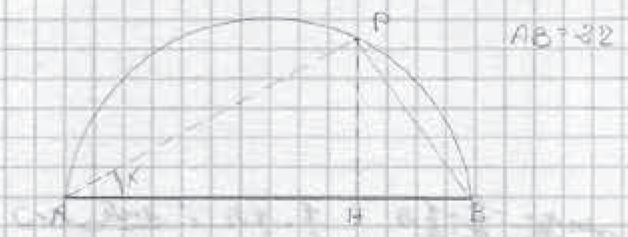
6° caso) $K = \frac{9}{8}$ $\quad \Delta = 0 \Rightarrow \exists\, x_1 = x_2 = -\frac{B}{2A} = \frac{1}{4}$.

7° caso) $K > \frac{9}{8}$ $\quad \Delta < 0$

Il problema non ha soluzioni.

Esercizio: Problema: su una semicirconferenza di diametro $\overline{AB}=2r$, determinare un punto P in modo che, condotta da P la perpendicolare $\overline{PH}$ ad AB si abbia:

$$\overline{AB}\cdot\overline{PB}+\overline{AB}\cdot\overline{AH}=4kr^2 \quad \text{con } k>0$$



pongo $P\hat{A}B=x$

$0°\leq x\leq 90°$

$\overline{AB}=2r$

$\overline{PB}=2r\,\text{sen}\,x$ (in un T.R un cateto è uguale al prodotto tra l'ip. e il seno dell'angolo opposto al cateto considerato).

$\overline{AP}=2r\cos x$ (in un T.R un cateto è uguale al prodotto tra l'ip. e il coseno dell'angolo ad esso adiacente).

$\overline{AH}=\overline{AP}\cdot\cos x=2r\cos x\cdot\cos x=2r\cos^2 x$

$$4r^2\,\text{sen}\,x+4r^2\cos^2 x=4kr^2$$

$$\text{sen}\,x+\cos^2 x-k=0$$

$$-\text{sen}^2 x+\text{sen}\,x-k+1=0$$

$$\begin{cases}\text{sen}^2 x-\text{sen}\,x+k-1=0\\ 0\leq \text{sen}\,x\leq 1\end{cases}$$ eq. di secondo grado in sen x completa.

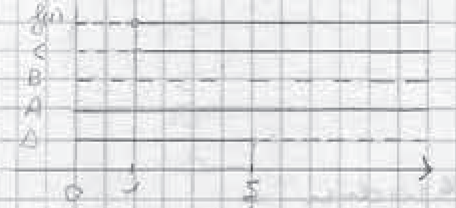
$\Delta=1-4k+4\geq 0$ per $4k-5\leq 0$ per $k\leq\frac{5}{4}$

$A=1>0\ \forall k$

$B=-1<0\ \forall k$

$C=k-1>0$ per $k>1$

$f(1)=\cancel{1}-\cancel{1}+k-1\geq 0$ per $k\geq 1$



1°caso) $0<k<1$ $\quad\Delta>0\Rightarrow \text{sen}_1 x\neq \text{sen}_2 x\in R$

$\left.\begin{array}{l}A>0\\ B<0\\ C<0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{sen}_1 x>0$ et $\text{sen}_2 x<0$

$\left.\begin{array}{l}A>0\\ f(1)<0\end{array}\right\}\Rightarrow$ "1" è interno all'intervallo delle radici.

Il problema non ha soluzioni.

2° caso) $k=1$ $\quad f(1)=0 \Rightarrow sen_1 x = 1$ et $sen_2 x = -\frac{B}{A} - 1 = 1-1=0$

Il problema ha due soluzioni.

3° caso) $1 < k < \frac{5}{4}$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, sen_1 x \neq sen_2 x \in R$

$\left.\begin{array}{l} A>0 \\ B<0 \\ C>0 \end{array}\right\} \Rightarrow sen_1 x > 0$ et $sen_2 x > 0$ $\qquad \left.\begin{array}{l} A>0 \\ f(1)\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ "1" è esterno all'intervallo delle radici

Il problema ha due soluzioni.

4° caso) $k=\frac{5}{4}$ $\quad \Delta = 0 \Rightarrow \exists\, sen_1 x = sen_2 x = -\frac{B}{2A} = \frac{1}{2}$.

Il problema ha due soluzioni coincidenti.

5° caso) $k > \frac{5}{4}$ $\quad \Delta < 0$

Il problema non ha soluzioni.

Risoluzione per via analitica:

pongo $y=k$

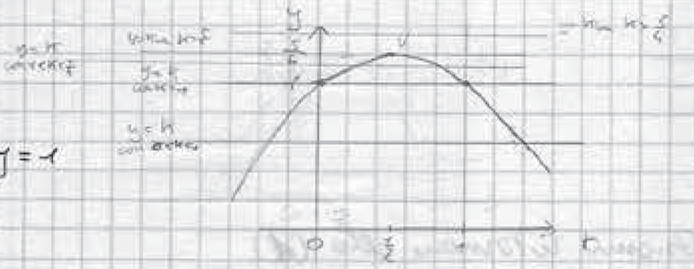
pongo $sen\, x = t$

$t^2 - t + y - 1 = 0$

$\begin{cases} y = -t^2 + t + 1 \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$

$V \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{5}{4} \end{cases}$

per $t=0 \Rightarrow y=1$



1° caso) $0<k<1$ il problema non ha soluzioni

2° caso) $k=1$ il problema ha due soluzioni

3° caso) $1<k<\frac{5}{4}$ il problema ha due soluzioni

4° caso) $k=\frac{5}{4}$ il problema ha due soluzioni coincidenti.

5° caso) $k>\frac{5}{4}$ il problema non ha soluzioni.

Se il testo è: $\overline{AP}\cdot\overline{PB} + \overline{AB}\cdot\overline{AH} = 4kr^2$ con $k \geq 0$ viene:

pongo $P\hat{A}B = x \Rightarrow 0° \leq x \leq 90°$

$\overline{AP} = 2r \cos x$

$\overline{PB} = 2r\, sen\, x$

$\overline{AH} = \overline{AP}\cdot \cos x = 2r \cos^2 x$

$2r \cos x \cdot 2r\, sen\, x + 2r \cdot 2r \cos^2 x = 4kr^2$

$\cos x \operatorname{sen} x + \cos^2 x - k = 0$ eq. di secondo grado in sen e cos che si può rendere omogenea

$\cos x \operatorname{sen} x + \cos^2 x - k(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) = 0$

$\cos x \operatorname{sen} x + \cos^2 x - k\cos^2 x - k\operatorname{sen}^2 x = 0$

$-k\operatorname{sen}^2 x + \cos x \operatorname{sen} x + \cos^2 x - k\cos^2 x = 0$

$k\operatorname{sen}^2 x - \cos x \operatorname{sen} x + (k-1)\cos^2 x = 0$ (1)

se è $k \neq 0$ allora possiamo dividere anche i membri dell'eq per $\cos^2 x$ e ottenere una eq equivalente.

$$\begin{cases} k\,tg^2 x - tg\,x + k - 1 = 0 \\ tg\,x > 0 \end{cases}$$

$\Delta = 1 - 4k(k-1) = 1 - 4k^2 + 4k \geq 0$ per $4k^2 - 4k - 1 \leq 0$

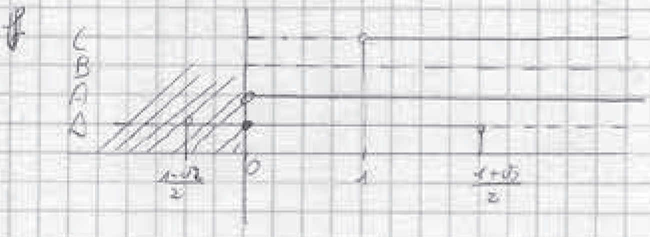
$\Delta = 0$ per $k = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ et $k = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$

$\Delta \geq 0$ per $\frac{1-\sqrt{2}}{2} < k < \frac{1+\sqrt{2}}{2}$

$A \geq 0$ per $k \geq 0$

$B = -1 < 0 \ \forall k$

$C = k - 1 > 0$ per $k > 1$



1° caso) $k = 0$ in questo caso dobbiamo ritornare alla (1)

$-\operatorname{sen} x \cos x - \cos^2 x = 0$

$\cos x(-\operatorname{sen} x - \cos x) = 0$

$\cos x = \cancel{x} = 90°$ fa geometrica

$\operatorname{sen} x + \cos x = 0$

$tg\,x + 1 = 0$

$tg\,x = -1$ non risolve

Il problema ha una sola soluzione data dal caso limite superiore.

2° caso) $0 < k < 1$ $\Delta > 0 \Rightarrow \exists\ tg_1 x \neq tg_2 \in R$

Il problema ha una sola soluzione

32

3° caso) $k=1$ $l=0$ $tg\,x=0 \Rightarrow x=0°$

$tg\,x = 1 \Rightarrow x = 45°$

4° caso) $1 < k < \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ $\Delta > 0 \Rightarrow \exists\ tg_1 x \neq tg_2 x$

$\left.\begin{array}{l} A>0 \\ B<0 \\ C>0 \end{array}\right\} \Rightarrow tg_1 x > 0$ et $tg_2 x > 0$

Il problema ha due soluzione.

5° caso) $k = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ $\Delta = 0 \Rightarrow tg_1 x = tg_2 x = -\frac{B}{2A} = 1-\sqrt{2} \Rightarrow x = 22°30'$

Il problema ha due soluzioni coincidenti

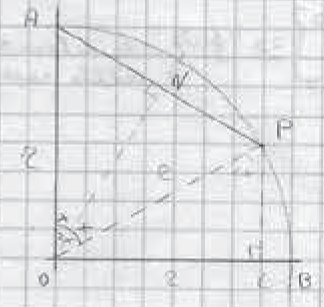
6° caso) $k > \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ $\Delta < 0$

Il problema non ha soluzione perchè le radici non sono reali

Il problema non può essere risolto per via analitica perchè k compare anche come coefficiente del termine di secondo grado.

<u>Esr: 83 pag 422</u> Problema:

Determinare sopra un arco AB, quarta parte di una circonferenza di centro O e raggio 2, un punto P tale che, detta C la proiezione ortogonale di P sul raggio OB, si abbia che la somma del segmento AP e del doppio del segmento PC sia eguale ad un segmento di misura l. Discussione. Si assuma come incognita $A\hat{O}P = 2x$



$\overline{AP} + 2\overline{PC} = l$

pongo $A\hat{O}P = 2x$

$0° \leq x \leq 45°$

$\overline{AN} = \overline{NP} = 2\,sen\,x$

$\overline{AP} = 2\cdot 2\,sen\,x$

$O\hat{P}C = 2x$ perchè $P\hat{O}B = 90°-2x$; $P\hat{C}O = 90°$; $O\hat{P}C = 180-(90°+90°-2x) = 2x$

$\overline{PC} = 2\cos 2x$

$2\cdot2\,sen\,x + 2\cdot2\cos 2x = l$

$2\cdot2\,sen\,x + 2\cdot2(\cos^2 x - sen^2 x) = l$

$2\cdot2\,sen\,x + 2\cdot2(1-2\,sen^2 x) - l = 0$

$-4\cdot2\,sen^2 x + 2\cdot2\,sen\,x + 2\cdot2 - l = 0$

$\begin{cases} 4\cdot2\,sen^2 x - 2\cdot2\,sen\,x + l - 2\cdot2 = 0 \\ 0 \leq sen\,x \leq \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{cases}$

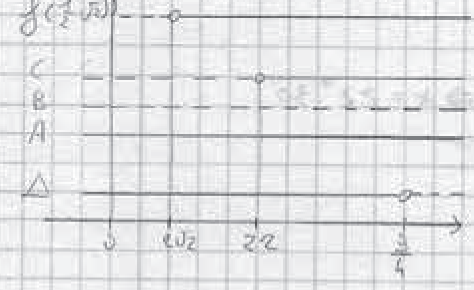
$\hat{A} = 4r > 0 \ \forall l$

$B = -2r < 0 \ \forall l$

$C = l - 2r \geq 0$ per $l \geq 2r$

$* \ \frac{1}{4}\Delta = r^2 - 4r(l - 2r) = r^2 - 4rl + 8r^2 = 9r - 4l \geq 0 \Rightarrow l \leq \frac{9}{4}$

$f(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \cancel{2r} - r\sqrt{2} + l - \cancel{2r} = l - r\sqrt{2} \geq 0$ per $l \geq r\sqrt{2}$



1° caso) $0 < l < r\sqrt{2}$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists \ sen_1 x \neq sen_2 x \in R$

$\left.\begin{array}{l} A > 0 \\ B < 0 \\ C < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} sen_1 x > 0 \\ sen_2 x < 0 \end{array}$ $\qquad \left.\begin{array}{l} f(\frac{1}{2}\sqrt{2}) < 0 \\ A > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ "$\frac{1}{2}\sqrt{2}$" è interno all'intervallo delle radici

Il problema non ha soluzioni

2° caso) $l = r\sqrt{2}$ $\quad f(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow \cancel{6}\ sen_1 x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ et $sen_2 x = -\frac{B}{A} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} < 0$

Il problema ha una sola soluzione data dal caso limite superiore.

La figura si specializza con:

3° caso) $r\sqrt{2} < l < 2r$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists \ sen_1 x \neq sen_2 x \in R$

$\left.\begin{array}{l} A > 0 \\ B < 0 \\ C < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} sen_1 x > 0 \\ sen_2 x < 0 \end{array}$ $\qquad \left.\begin{array}{l} f(\frac{1}{2}\sqrt{2}) > 0 \\ A > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ "$\frac{1}{2}\sqrt{2}$" è esterno all'intervallo delle radici

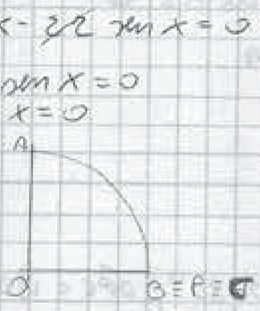
Il problema ha una sola soluzione.

4° caso) $l = 2r$ $\quad C = 0 \Rightarrow \cancel{4r}\ sen^2 x - 2r\ sen x = 0$

$sen x = 0$

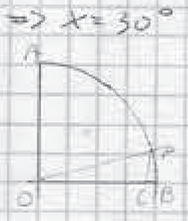
$x = 0$

La figura si specializza con:



$sen x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 30°$

La figura si specializza con



5° caso) $2r < l < \frac{9}{4}$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists \ sen_1 x \neq sen_2 x \in R$

$\left.\begin{array}{l} A > 0 \\ B < 0 \\ C > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} sen_1 x > 0 \\ sen_2 x > 0 \end{array}$ $\qquad \left.\begin{array}{l} f(\frac{1}{2}\sqrt{2}) > 0 \\ A > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ "$\frac{1}{2}\sqrt{2}$" è esterno all'intervallo delle radici

Il problema ha due soluzioni.

6° caso) $\ell = \frac{9}{4}$ $\Delta = 0 \Rightarrow \exists\ \sin_1 x = \sin_2 x = -\frac{B}{2A} = \frac{1}{4}$

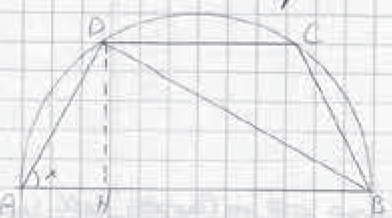
Il problema ha due soluzioni coincidenti.

7° caso) $\ell > \frac{9}{4}$ $\Delta < 0$

Il problema non ha soluzioni perché le radici non sono reali

Es n° 50 pag 422 Problema

Un trapezio isoscele ha le diagonali perpendicolari ai lati obliqui e la base maggiore che misura a. Determinare la misura degli angoli adiacenti alla base maggiore in modo che la somma della base minore e del lato obliquo misuri ka.



$\overline{AB} = a$

$\overline{DC} + \overline{AD} = ka$

pongo $B\hat{A}D = x \Rightarrow 45° \leq x < 90°$

$\overline{AD} = \overline{AB} \cos x = a \cos x$

$\overline{AH} = \overline{AD} \cos x = a \cos^2 x$

$\overline{DC} = \overline{AB} - 2\overline{AH} = a - 2a \cos^2 x$

$a - 2a\cos^2 x + a\cos x = ka$

$$\begin{cases} 2a\cos^2 x - a\cos x + a(k-1) = 0 \\ 0 < \cos x \leq \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{cases}$$

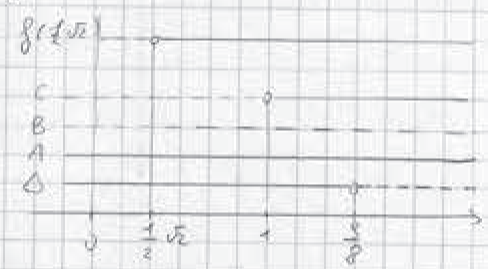
$\Delta = 1 - 8(k-1) = 1 - 8k + 8 \geq 0$ per $k \leq \frac{9}{8}$

$A = 2 > 0 \ \forall k$

$B = -1 < 0 \ \forall k$

$C = k - 1 \geq 0$ per $k \geq 1$

$f(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} + k - 1 \geq 0$ per $k \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}$



1° caso) $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $f(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow \cos_1 x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ et $\cos_2 x = -\frac{B}{A} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} < 0$

Il problema ha una sola soluzione.

La figura si presenta così:

2° caso) $\frac{1}{2}\sqrt{2} < k < 1$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists \cos_1 x \neq \cos_2 x \in R$

$$\left.\begin{array}{l} A>0 \\ B<0 \\ C<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \cos_1 x > 0 \\ \cos_2 x < 0 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} f(\frac{1}{2}\sqrt{2}) > 0 \\ A>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ "$\frac{1}{2}\sqrt{2}$" è esterno all'intervallo delle radici

Il problema ha una sola soluzione.

3° caso) $k = 1$ $\quad C = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = 90°$ e la figura si presenta così: (degenere)

$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 60°$ e la figura si presenta così:

Il problema ha due soluzioni

4° caso) $1 < k < \frac{9}{8}$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists \cos_1 x \neq \cos_2 x \in R$

$$\left.\begin{array}{l} A>0 \\ B<0 \\ C>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \cos_1 x > 0 \\ \cos_2 x > 0 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} f(\frac{1}{2}\sqrt{2}) > 0 \\ A>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ "$\frac{1}{2}\sqrt{2}$" è esterno all'intervallo delle radici

Il problema ha due soluzioni

5° caso) $k = \frac{9}{8}$ $\quad \Delta = 0 \Rightarrow \exists \cos_1 x = \cos_2 x = -\frac{B}{2A} = \frac{1}{4}$

Il problema ha due soluzioni coincidenti

6° caso) $k > \frac{9}{8}$ $\quad \Delta < 0$

Il problema non ha soluzioni perché le radici non sono reali

Risoluzione per via analitica:

pongo $y = k$

pongo $t = \cos x$

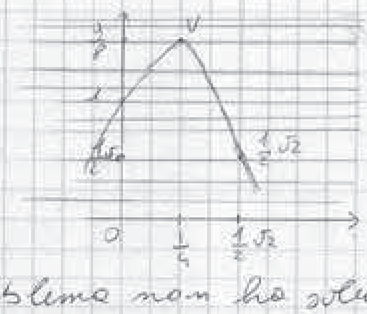
$y = -2t^2 + t + 1$

$0 < t < \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$V \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{9}{8} \end{cases}$

per $t = 0 \Rightarrow y = 1$

per $t = \frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$



1° caso) $0 < k < \frac{1}{2}\sqrt{2}$. il problema non ha soluzioni.

2° caso) $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. il problema ha una soluzione

3° caso) $\frac{1}{2}\sqrt{2} < k < 1$ il problema ha una sola soluzione.

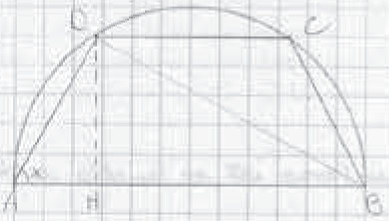
4° caso) $k = 1$ il problema ha due soluzioni

5° caso) $1 < k < \frac{9}{8}$ il problema ha due soluzioni.

6° caso) $k = \frac{9}{8}$ il problema ha due soluzioni coincidenti; 7° caso) $k > \frac{9}{8}$ il problema non ha soluzioni

Es. n. 31 pag 422   Problema:

Si consideri il trapezio del numero precedente. Determinare la misura degli angoli adiacenti alla base maggiore in modo che la somma della base minore e dell'altezza misuri ka



$\overline{AB} = a$

$\overline{DC} + \overline{DH} = ka$

pongo $D\hat{A}B = A\hat{B}C = x \Rightarrow 45° \leq x < 90°$

$\overline{AD} = a\cos x$

$\overline{AH} = a\cos^2 x$

$\overline{DC} = a - 2a\cos^2 x$

$\overline{DH} = AD \cdot \operatorname{sen} x = a\cos x \operatorname{sen} x$

$\cancel{a} - 2\cancel{a}\cos^2 x + \cancel{a}\operatorname{sen} x\cos x - k\cancel{a} = 0$

$-2\cos^2 x + \operatorname{sen} x\cos x - k + 1 = 0$ eq. di secondo grado in seno e coseno che si può rendere omogenea

$-2\cos^2 x + \operatorname{sen} x\cos x + (1-k)(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) = 0$

$-\cos^2 x - k\cos^2 x + \operatorname{sen} x\cos x + \operatorname{sen}^2 x - k\operatorname{sen}^2 x = 0$

$(k-1)\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x\cos x + (k+1)\cos^2 x = 0$

Divido per $\cos^2 x$ ma con $k \neq 1$ (se è $k \neq 1$ non può esistere un angolo x che annulla il coseno e nello stesso tempo risolve l'equazione).

$$\begin{cases} (k-1)\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + k + 1 = 0 \\ \operatorname{tg} x \geq 1 \end{cases}$$

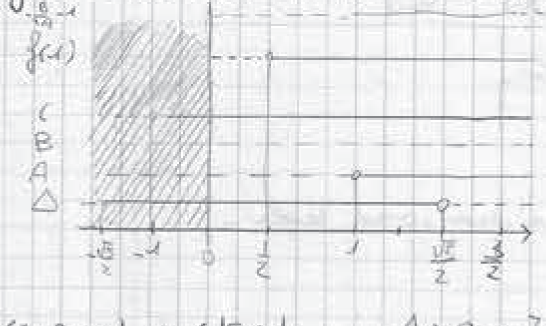
$\Delta = 1 - 4(k^2 - 1) = 1 - 4k^2 + 4 = -4k^2 + 5 \geq 0$ per $4k^2 - 5 \leq 0$ per $-\frac{\sqrt{5}}{2} \leq k \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$

$A = k - 1 \geq 0$ per $k \geq 1$

$B = -1 < 0 \ \forall k$

$C = k + 1 \geq 0$ per $k \geq -1$ } INUTILE

$f(1) = k - 1 - 1 + k + 1 = 2k - 1 \geq 0$ per $k \geq \frac{1}{2}$



$-\frac{B}{2A} > 1$

$\frac{1}{2k-2} > 1 \Rightarrow \frac{1}{2k-2} > \frac{2k-2}{2k-2} \Rightarrow \frac{-2k+3}{2k-2} > 0$

$N > 0$ per $k < \frac{3}{2}$

$D > 0$ per $k > 1$

$-\frac{B}{2A} > 1$ per $1 < k < \frac{3}{2}$

1° caso) $0 < k < \frac{1}{2}$ $\Delta > 0 \Rightarrow \exists\ \operatorname{tg}_1 x \neq \operatorname{tg}_2 x \in \mathbb{R}$

$\left.\begin{matrix} A<0 \\ B<0 \\ C>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \operatorname{tg}_1 x > 0 \\ \operatorname{tg}_2 x < 0 \end{matrix}$ $\left.\begin{matrix} f(1) < 0 \\ A < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ 1 è esterno all'intervallo delle radici.

Il problema non ha soluzioni.

2° caso) $k = \frac{1}{2}$ $f(1) = 0 \Rightarrow tg_1 x = 1$ et $tg_2 x = \frac{B}{A} - 1 = \frac{1}{k-1} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{2}-1} - 1 = \frac{1}{-\frac{1}{2}} - 1 = -3$

Il problema ha una soluzione e la figura si presenta così

3° caso) $\frac{1}{2} < k < 1$ $\Delta > 0 \Rightarrow \exists\ tg_1 x \neq tg_2 x \in R$

$\left.\begin{array}{l} A < 0 \\ B < 0 \\ C > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} tg_1 x < 0 \\ tg_2 x > 0 \end{array}$ $\left.\begin{array}{l} f(1) > 0 \\ A < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ "1" è interno all'intervallo delle radici

Il problema ha una sola soluzione.

4° caso) $k = 1$ ~~A=0~~ in questo caso dobbiamo ritornare all'equazione data perchè essa non equivale più alla derivata e quella in tangente che diventa

$2\cos^2 x - \operatorname{sen} x \cos x = 0$

$\cos x (2 \cos x - \operatorname{sen} x) = 0$; per la legge di annullamento del prodotto si ha

$\cos x = 0 \Rightarrow x = 90^{\circ}$

$2 \cos x - \operatorname{sen} x = 0$
divido per $\cos x$.

$-tg\, x + 2 = 0$

$tg\, x = 2$

Il problema ha una sola soluzione.

5° caso) $1 < k < \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\Delta > 0 \Rightarrow \exists\ tg_1 x \neq tg_2 x \in R$

$\left.\begin{array}{l} A > 0 \\ B < 0 \\ C > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} tg_1 x > 0 \\ tg_2 x > 0 \end{array}$ $\left.\begin{array}{l} f(1) > 0 \\ A > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ "1" è esterno all'intervallo delle radici.

$-\frac{B}{2A} - 1 > 0 \Rightarrow -\frac{B}{2A} > 1$

Il problema ha 2 soluzioni

6° caso) $k = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\Delta = 0 \Rightarrow \exists\ tg_1 x = tg_2 x = -\frac{B}{2A} = \frac{1}{2k-2} = \frac{1}{\sqrt{5}-2}$

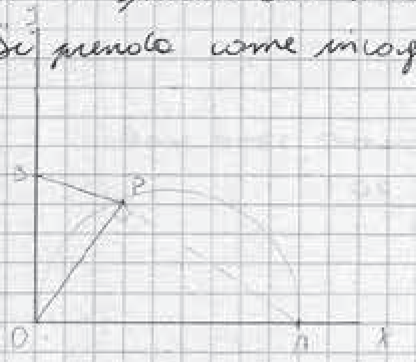
Il problema ha due soluzioni coincidenti.

7° caso) $k > \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\Delta < 0$

Il problema non ha soluzioni perchè le radici non sono reali.

42 Es n: 95 pag 423 Problema:

È dato un angolo retto XOY e sono dati due punti A e B sui lati OX e OY in modo che $OA = OB\sqrt{3}$. Determinare un punto P interno all'angolo retto sapendo che l'angolo $O\hat{P}A$ è retto e che è $\overline{OP}^2 + \overline{PB}^2 = k\cdot\overline{OB}^2$. Discussione. Si prenda come incognita $\operatorname{tg} A\hat{O}P$. (Maturità scientifica, 1928)



$A\hat{O}B = 30°$

$OA = OB\sqrt{3}$

$$\overline{OP}^2 + \overline{PB}^2 = k\,\overline{OB}^2$$

pongo $\overline{OB} = a \Rightarrow \overline{OA} = a\sqrt{3}$

pongo $\operatorname{tg} A\hat{O}P = x \qquad \Rightarrow \quad x \geq 0$

$\overline{AP} = \overline{OP}\cdot x$

$$\overline{OP}^2 + \overline{AP}^2 = \overline{AO}^2 \Rightarrow \overline{OP}^2 + \overline{OP}^2\cdot x^2 = 3a^2 \Rightarrow OP^2 = \frac{3a^2}{x^2+1}$$

$\overline{PB}^2$ (applico il teorema di Carnot) $= \overline{OB}^2 + \overline{OP}^2 - 2\,\overline{OB}\cdot\overline{OP}\cdot\cos B\hat{O}P = \overline{OB}^2 + \overline{OP}^2 - 2\overline{OB}\cdot\overline{OP}\cdot \operatorname{sen} A\hat{O}P$

Per uno dei teoremi sulla risoluzione dei triangoli rettangoli viene che $\overline{AP} = \overline{OA}\ \operatorname{sen} A\hat{O}P \rightarrow \operatorname{sen} A\hat{O}P = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}}$, viene

$$\overline{PB}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OP}^2 - 2\overline{OB}\cdot\overline{OP}\cdot\frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} =$$

$$= a^2 + \frac{3a^2}{x^2+1} + \frac{-2a\sqrt{3(x^2+1)}}{x^2+1}\cdot\frac{ax\sqrt{3(x^2+1)}}{x^2+1}\cdot\frac{1}{a\sqrt{3}} = a^2 + \frac{3a^2}{x^2+1} - \frac{6a^2x\sqrt{3}}{3(x^2+1)} =$$

$$= \frac{3a^2x^2 + 3a^2 + 9a^2 - 6a^2x\sqrt{3}}{3(x^2+1)} = \frac{a^2x^2 - 2a^2x\sqrt{3} + 4a^2}{x^2+1}.$$

equazione:

$$\frac{3a^2}{x^2+1} + \frac{a^2x^2 - 2a^2x\sqrt{3} + 4a^2}{x^2+1} = ka^2$$

$$3\cancel{a^2} + \cancel{a^2}x^2 - 2\cancel{a^2}x\sqrt{3} + 4\cancel{a^2} = k\cancel{a^2}x^2 + k\cancel{a^2}$$

$$3 + x^2 - 2x\sqrt{3} + 4 - kx^2 - k = 0$$

$$\begin{cases} (1-k)x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 7 - k = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{4}\Delta = 3 + (k-1)(7-k) = 3 + 7k - k^2 - 7 + k = -k^2 + 8k - 4 \geq 0 \text{ per } k^2 - 8k + 4 \leq 0$$

$$k = 4 \pm \sqrt{16-4} = 4 \pm \sqrt{12} = 4 \pm 2\sqrt{3}$$

$\Delta \geq 0$ per $4 - 2\sqrt{3} \leq k \leq 4 + 2\sqrt{3}$.

$A = 1 - k \geq 0$ per $k \leq 1$

$B = -2\sqrt{3} < 0\ \forall k$

$C = 7 - k \geq 0$ per $k \leq 7$

1° caso) $k<4-2\sqrt3$ $\Delta<0$.

Il problema non ha soluzioni perché le radici non sono reali

2° caso) $k=4-2\sqrt3$ $\Delta=0 \Rightarrow \exists\, x_1=x_2=-\frac{B}{2A}=\frac{\sqrt3}{1-k}=\frac{\sqrt3}{1+2\sqrt3-4}>0$

Il problema ha due soluzioni coincidenti.

3° caso) $4-2\sqrt3<k<1$ $\Delta>0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} A>0 \\ B<0 \\ C>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1>0 \\ \\ x_2>0 \end{array}$$

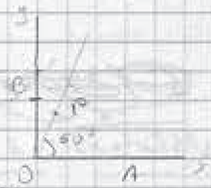
Il problema ha due soluzioni.

4° caso) $k=1$ $A=0 \Rightarrow -2\sqrt3\, x+6=0$

$$-\sqrt3 x+3=0$$

$x=\frac{3}{\sqrt3} \Rightarrow \sqrt3 \Rightarrow A\hat{O}P=60°$. il problema ha una sola soluzione

La figura si presenterebbe così:



5° caso) $1<k<7$ $\Delta>0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} A<0 \\ B<0 \\ C>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1<0 \\ \\ x_2>0 \end{array}$$

Il problema ha una sola soluzione.

6° caso) $k=7$. $C=0 \Rightarrow (1-k)x^2-2\sqrt3 x=0$

$$-6x^2-2\sqrt3 x=0$$
$$-3x^2-\sqrt3 x=0$$
$$x=0$$
$$x=-\frac{\sqrt3}{3}$$

Il problema ha una sola soluzione e la figura si presenterebbe così:

7° caso) $7<k<4+2\sqrt3$ $\Delta>0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} A<0 \\ B<0 \\ C<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1<0 \\ \\ x_2<0 \end{array}$$

Il problema non ha soluzioni.

8° caso) $k=4+2\sqrt3$ $\Delta=0 \Rightarrow x_1=x_2=-\frac{B}{2A}=\frac{\sqrt3}{1-k}=\frac{\sqrt3}{1-4-2\sqrt3}$

Il problema non ha soluzioni.

4/9: caso $k > 4+2\sqrt{5}$ $\quad \Delta<0$

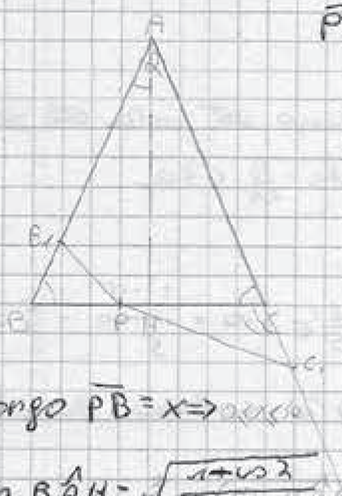
Il problema non ha soluzioni perché le radici non sono reali.

Problema:

In un triangolo isoscele la base BC misura $3a$ e il coseno dell'angolo $B\hat{A}C$ è uguale a $\frac{7}{25}$.

Si considera sul lato AB il punto B_1 e sul prolungamento di AC (dalla parte di C) il punto C_1 in modo che risulti $\overline{BB_1} = \overline{CC_1} = a$.

Determinare sulla base BC un punto P in modo che risulti:



$$\overline{PB_1}^2 + \overline{PC_1}^2 = k a^2 \quad \text{con } k>0$$

pongo $\overline{PB} = x \ (\Rightarrow \ 0 \leq x \leq 3a)$

$\cos B\hat{A}C = \frac{7}{25}$

$\overline{BB_1} = \overline{CC_1} = a$

$\overline{BC} = 3a$

pongo $\overline{PB} = x \Rightarrow \quad 0 \leq x \leq 3a$

$$\text{sen } B\hat{A}H = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{18}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} = \cos P\hat{B}B_1.$$

$$\overline{PB_1}^2 = a^2 + x^2 - 2ax\frac{3}{5} = a^2 + x^2 - \frac{6}{5}ax$$

$$\overline{PC_1}^2 = (3a-x)^2 + a^2 + 2a(3a-x)\frac{3}{5} = 9a^2 - 6ax + x^2 + a^2 + \frac{18}{5}a^2 - \frac{6}{5}ax.$$

$$a^2 + x^2 - \frac{6}{5}ax + 9a^2 - 6ax + x^2 + a^2 + \frac{18}{5}a^2 - \frac{6}{5}ax = ka^2$$

$$5a^2 + 5x^2 - 6ax + 45a^2 - 30ax + 5x^2 + 5a^2 + 18a^2 - 6ax - 5ka^2 = 0$$

$$\begin{cases} 10x^2 - 42ax + 73a^2 - 5ka^2 = 0 \\ 0 \leq x \leq 3a \end{cases}$$

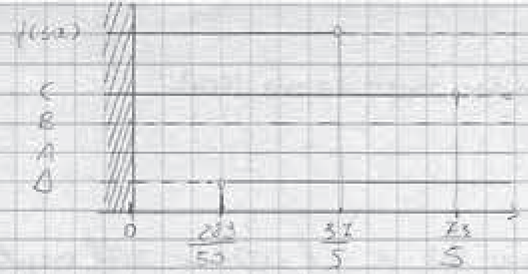
$$\frac{1}{4}\Delta = 441a^2 - 10(73a^2 - 5ka^2) = 441a^2 - 730a^2 + 50ka^2 = -289 + 50k \geq 0 \text{ per } k \geq \frac{289}{50}$$

$A = 10 > 0 \ \forall k$

$B = -42a < 0 \ \forall k$

$C = 73a^2 - 5ka^2 \geq 0$ per $k \leq \frac{73}{5}$

$f(3a) = 90a^2 - 126a^2 + 73a^2 - 5ka^2 = 37 - 5k \geq 0$ per $k \leq \frac{37}{5}$.



1° caso) $0 < k < \frac{289}{50}$. $\Delta < 0$

Il problema non ha soluzioni perché le radici non sono reali.

2° caso) $k = \frac{289}{50}$ $\Delta = 0 \Rightarrow \exists\, x_1 = x_2 \in R = -\frac{B}{2A} = \frac{21}{10}a$

Il problema ha due soluzioni coincidenti.

3° caso) $\frac{289}{50} < k < \frac{37}{5}$ $\Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in R$.

$$\left.\begin{matrix} A > 0 \\ B < 0 \\ C > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{matrix} \quad \left.\begin{matrix} f(3a) > 0 \\ A > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{"3a" è esterno all'intervallo delle radici}$$

e destra perché $-\frac{B}{2A} < 3a$

Il problema ha due soluzioni.

4° caso) $k = \frac{37}{5}$. $f(3a) = 0 \Rightarrow x_1 = 3a$ e $x_2 = -\frac{B}{A} - 3a = \frac{21}{5}a - 3a = \frac{21-15}{5}a = \frac{6}{5}a$

Il problema ha due soluzioni di cui una è data dal ~~sup~~ limite superiore.

5° caso) $\frac{37}{5} < k < \frac{73}{5}$ $\Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in R$

$$\left.\begin{matrix} A > 0 \\ B < 0 \\ C > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{matrix} \quad \left.\begin{matrix} f(3a) < 0 \\ A > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{"3a" è interno all'intervallo delle radici.}$$

Il problema ha una sola soluzione.

6° caso) $k = \frac{73}{5}$ $C = 0 \Rightarrow 10x^2 - 42ax = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = -\frac{B}{A} = \frac{21}{5}a$

Il problema ha una sola soluzione data dal limite inferiore.

7° caso) $k > \frac{73}{5}$. $\Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in R$

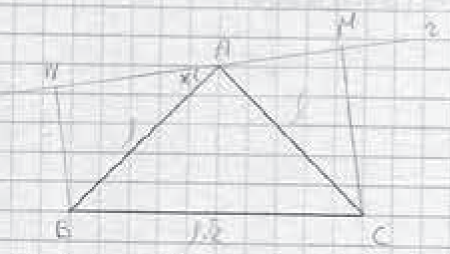
$$\left.\begin{matrix} A > 0 \\ B < 0 \\ C < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \end{matrix} \quad \left.\begin{matrix} f(3a) < 0 \\ A > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{"3a" è interno all'intervallo delle radici.}$$

$x_1 \quad 0 \quad 3a \quad x_2$

Il problema non ha soluzioni.

44 Es n: 96 pag 423 Problema:

Nel triangolo rettangolo isoscele BAC, i cateti AB e AC misurano l. Si conduce per il vertice A, esternamente al triangolo, una retta r in modo che la somma delle distanze dei vertici B e C dalla retta r stia in un rapporto q con l'ipotenusa del triangolo. Si assuma come incognita l'angolo che la retta r forma con il cateto AB. Discussione.



$\overline{AB} = \overline{AC} = l$
$B\hat{A}C = 90°$
$\frac{\overline{BN} + \overline{MC}}{\overline{BC}} = q$

pongo $B\hat{A}N = x \Rightarrow 0 \le x \le 90°$

$\overline{BN} = l \operatorname{sen} x$

$\overline{MC} = l \cos x$ ($C\hat{A}M$ è l'angolo complementare a $B\hat{A}N$)

$\frac{l \operatorname{sen} x + l \cos x}{l\sqrt{2}} = q$

$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos x = q\sqrt{2} \quad (1) \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$

$\operatorname{sen} x = q\sqrt{2} - \cos x$

$2q^2 - 2q\sqrt{2}\cos x + \cos^2 x + \cos^2 x = 1$

$\begin{cases} 2\cos^2 x - 2q\sqrt{2}\cos x + 2q^2 - 1 = 0 \\ 0 \le \cos x \le 1 \end{cases}$

$\frac{1}{4}\Delta = 2q^2 - 2(2q^2 - 1) = 2q^2 - 4q^2 + 2 = -q^2 + 1 \ge 0$ per $q^2 - 1 \le 0$ per $-1 \le q \le 1$

$A = 2 > 0 \ \forall q$

$B = -2q\sqrt{2} > 0$ per $q < 0$

$C = 2q^2 - 1 \ge 0$ per $q \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $q \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(1) = 2 - 2q\sqrt{2} + 2q^2 - 1 = 2q^2 - 2q\sqrt{2} + 1$.

$q = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2-2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(1) \ge 0 \ \forall q$

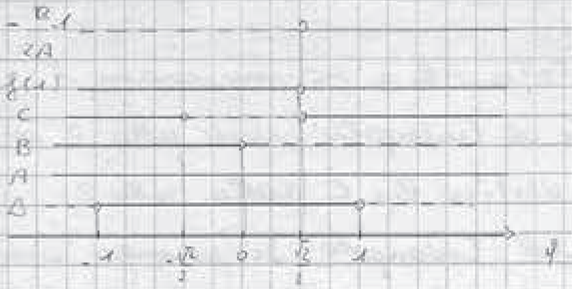
$f(1) = 0$ per $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\frac{B}{2A} > 1$

$\frac{1}{2}\sqrt{2}\, q > 1$

$q\sqrt{2} > 2$ per $q > \frac{2}{\sqrt{2}}$ per $q > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$-\frac{B}{2A} - 1 > 0$ per $q > \frac{\sqrt{2}}{2}$



1° caso) $q<-1$ $\quad \Delta<0$

Il problema non ha soluzioni perché le radici non sono reali.

2° caso) $\Delta=0 \Rightarrow \exists \cos_1 x=\cos_2 x = -\frac{B}{2A} = \frac{q\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Il problema non ha soluzioni.

3° caso) $-1<q<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \Delta>0 \Rightarrow \exists \cos_1 x \neq \cos_2 x \in R$

$$\left.\begin{array}{l} A>0 \\ B>0 \\ C>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \cos_1 x<0 \\ \cos_2 x<0 \end{array}$$

Il problema non ha soluzioni.

4° caso) $q=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad C=0 \Rightarrow \quad 2\cos^2 x - 2q\sqrt{2}\cos x = 0$

$$2\cos^2 x + 2\cos x = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = 90$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = 180$$

Il problema ha una soluzione dato dal limite inferiore.

5° caso) $-\frac{\sqrt{2}}{2}<q<0$ $\quad \Delta>0 \Rightarrow \exists \cos_1 x \neq \cos_2 x \in R$

$$\left.\begin{array}{l} A>0 \\ B>0 \\ C<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \cos_1 x<0 \\ \cos_2 x>0 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} f(1)>0 \\ A>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ "1" è esterno all'intervallo delle radici

$$-\frac{B}{2A}-1<0 \Rightarrow -\frac{B}{2A}<1$$

Il problema ha una sola soluzione.

6° caso) $q=0$ $\quad B=0 \Rightarrow \quad 2\cos^2 x + 2q^2 - 1 = 0$

$$2\cos^2 x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Il problema ha una soluzione

7° caso) $0<q<\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \Delta>0 \Rightarrow \exists \cos_1 x \neq \cos_2 x \in R$

$$\left.\begin{array}{l} A>0 \\ B<0 \\ C<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \cos_1 x>0 \\ \cos_2 x<0 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} f(1)>0 \\ A>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ "1" è esterno all'intervallo delle radici

Il problema ha una sola soluzione.

8° caso) $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad f(1)=0 \Rightarrow \cos_1 x = 1$ et $\cos_2 x = -\frac{B}{A} - 1 = q\cdot\sqrt{2} - 1 = 1 - 1 = 0$

Il sistema ha due soluzioni. Le figure rispettivamente sono così:

3° caso) $\frac{\sqrt{2}}{2} < q < 1$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists \cos_1 x \neq \cos_2 x \in R$

$$\left.\begin{array}{l} A > 0 \\ B < 0 \\ C > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos_1 x > 0 \text{ et } \cos_2 x > 0 \qquad \left.\begin{array}{l} f(1) > 0 \\ A > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{"1" è estremo dell'intervallo delle radici.}$$

Il problema ha due soluzioni.

I) caso) $q = 1$ $\quad \Delta = 0 \Rightarrow \cos_1 x = \cos_2 x = -\frac{B}{2A} = \frac{q\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Il problema ha due soluzioni coincidenti.

III caso) $q > 1$ $\quad \Delta < 0$

Il problema non ha soluzioni perché le radici non sono reali.

Se la (1) è risolta con le formule parametriche viene: posto $tg \frac{x}{2} = t$

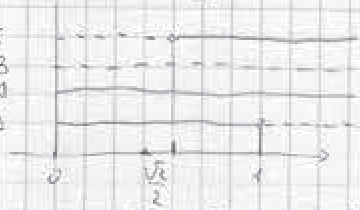
$$\begin{cases} (1 + q\sqrt{2})t^2 - 2t + q\sqrt{2} - 1 = 0 \\ t \geq 0 \end{cases}$$

$\Delta \geq 0$ per $-1 \leq q \leq 1$

$A > 0$ per $q \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$B = -2 < 0 \ \forall q$

$C \geq 0$ per $q \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$



1° caso) $0 < q < \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists t_1 \neq t_2 \in R$

$$\left.\begin{array}{l} A > 0 \\ B < 0 \\ C < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} t_1 > 0 \\ t_2 < 0 \end{array}$$

Il problema ha una sola soluzione

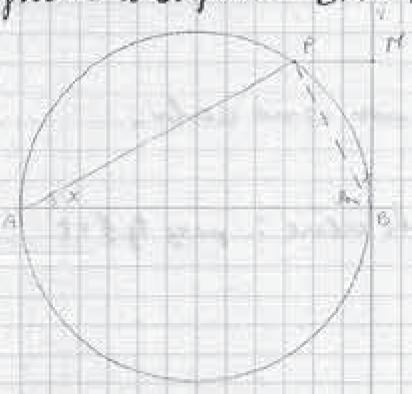
2° caso) $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad C = 0 \Rightarrow (1 + q\sqrt{2})t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t = 0$ et $t = 1$.

Il problema ha due soluzioni

3° caso) $\frac{\sqrt{2}}{2} < q < 1$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists t_1 \neq t_2 \in R$

[redacted] Es n° 37 pag 423 Problema:

Sopra una circonferenza data il cui diametro $\overline{AB}$ ha per misura $2r$, determinare un punto P in modo che, detta M la proiezione ortogonale di esso sulla retta perpendicolare in B ad AB, la somma dei due segmenti AP e PM abbia per misura un numero dato l. Discussione. Si assume come incognita l'angolo $B\hat{A}P$. (Maturità scientifica, 1933).



$AB = 2r$

$\overline{AP} + \overline{PM} = l$

pongo $B\hat{A}P = x$

$0° \leq x \leq 90°$

$\overline{AP} = 2r \cos x$

$\overline{PB} = 2r \operatorname{sen} x$

$\overline{PM} = 2r \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x = 2r \operatorname{sen}^2 x$.

$2r \cos x + 2r \operatorname{sen}^2 x = l$

$2r \cos x + 2r(1 - \cos^2 x) = l$

$2r \cos x + 2r - 2r \cos^2 x - l = 0$

$\begin{cases} 2r \cos^2 x - 2r \cos x + l - 2r = 0 \\ 0 \leq \cos x \leq 1 \end{cases}$ eq. di secondo grado in cos completa

$\frac{1}{4}\Delta = r^2 - 2r(l - 2r) = r^2 - 2rl + 4r^2 = 5r^2 - 2rl = 5r - 2l \geq 0$ per $l \leq \frac{5}{2}r$

$A = 2r > 0 \ \forall l$

$B = -2r < 0 \ \forall l$

$C = l - 2r \geq 0$ per $l \geq 2r$

$f(1) = \cancel{2r} - \cancel{2r} + l - 2r \geq 0$ per $l \geq 2r$

1° caso) $0 < l < 2r$. $\Delta > 0 \Rightarrow \exists \cos_1 x \neq \cos_2 x \in \mathbb{R}$

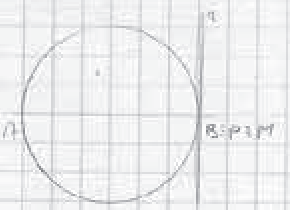
$\left.\begin{matrix} A > 0 \\ B < 0 \\ C < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \cos_1 x > 0 \\ \cos_2 x < 0 \end{matrix}$ $\left.\begin{matrix} f(1) < 0 \\ A > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ "1" è interno all'intervallo delle radici

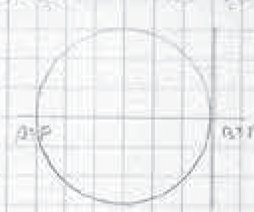
Il problema non ha soluzioni

2° caso) $l = 2r$ $f(1)=0 \Rightarrow \cos_1 x = 1$ et $\cos_2 x = -\frac{B}{A} - 1 = \frac{2}{2} - 1 = 0$

Il problema ha due soluzioni. Le figure si specializzano così:

per $\cos x = 1 \Rightarrow x = 0°$:   per $\cos x = 0 \Rightarrow x = 90°$:





3° caso) $2r < l < \frac{5}{2}r$ $\Delta > 0 \Rightarrow \exists \cos_1 x \neq \cos_2 x \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{matrix} A>0 \\ B<0 \\ C>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \cos_1 x > 0 \\ \cos_2 x > 0 \end{matrix} \qquad \left.\begin{matrix} f(1)>0 \\ A>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{"1" è esterno all'intervallo delle radici}$$

Il problema ha ~~due~~ soluzioni

4° caso) $l = \frac{5}{2}r$ $\Delta = 0 \Rightarrow \exists \cos_1 x = \cos_2 x = -\frac{B}{2A} = \frac{1}{2}$

Il problema ha due soluzioni coincidenti. La figura si specializza così:

5° caso) $l > \frac{5}{2}r$ $\Delta < 0$

Il problema non ha soluzioni perchè le radici non sono reali.

Risoluzione per via Analitica:

pongo $\cos x = t$

pongo $l = y$

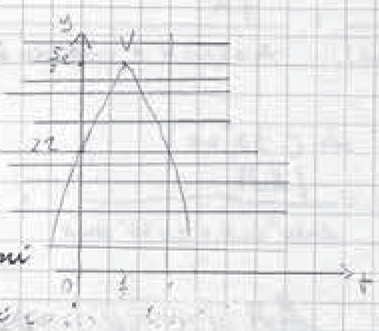
$$2r t^2 - 2r t + y - 2r = 0$$

$$\begin{cases} y = -2r t^2 + 2r t + 2r \\ 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

$$V \begin{cases} t = -\frac{B}{2A} = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2}r + r + 2r = 3r - \frac{1}{2}r = \frac{5}{2}r \end{cases}$$

per $t = 0 \Rightarrow y = 2r$

per $t = 1 \Rightarrow y = 2r$



1° caso) $0 < l < 2r$ il problema non ha soluzioni

2° caso) $l = 2r$ il problema ha due soluzioni

3° caso) $2r < l < \frac{5}{2}r$ il problema ha due soluzioni

4° caso) $l = \frac{5}{2}r$ il problema ha due soluzioni coincidenti

5° caso) $l > \frac{5}{2}r$ il problema non ha soluzioni

[redacted]

$$\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}$$ eq. razionale fratta

$x \neq 1$ et $x \neq -1$

m. c. m $=(x-1)(x+1)$

$3x+3+x-1-2=0$

$4x=0 \Rightarrow x=0$

Problema: (compito 11.12.1997):

Nel triangolo ABC, retto in $\hat{C}$, l'angolo in $\hat{A}$ è 60° e l'altezza $\overline{CH}$ relativa all'ipotenusa misura h. Determinare rispettivamente sui cateti AC e BC i punti S e R in modo che gli angoli $S\hat{H}C$ e $C\hat{H}R$ siano uguali e si abbia la relazione:

$$\overline{CH}\,(SH+RH)=k\cdot\overline{RH}\cdot\overline{SH} \quad \text{con } k>0$$

Porre (fila 1): $R\hat{H}B=x$

Porre (fila 2): $R\hat{H}C=x$

FILA N: 2

$\overline{CH}=h$

$S\hat{H}C=C\hat{H}R$

$\overline{SH}:\operatorname{sen}30°=\overline{CH}:\operatorname{sen}(60°+x)$ (applico il teorema dei seni)

$$\overline{SH}=\frac{\operatorname{sen}30°\cdot\overline{CH}}{\operatorname{sen}(60°+x)}=\frac{\frac{1}{2}h}{\operatorname{sen}60°\cos x+\cos60°\operatorname{sen}x}=\frac{\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}x}=\frac{h}{\sqrt{3}\cos x+\operatorname{sen}x}$$

$\overline{RH}:\operatorname{sen}60°=\overline{CH}:\operatorname{sen}(30°+x)$

$$\overline{RH}=\frac{\overline{CH}\cdot\operatorname{sen}60°}{\operatorname{sen}(30°+x)}=\frac{\frac{1}{2}h\sqrt{3}}{\operatorname{sen}30°\cos x+\cos30°\operatorname{sen}x}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}h}{\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sqrt{3}\operatorname{sen}x}=\frac{h\sqrt{3}}{\cos x+\sqrt{3}\operatorname{sen}x}$$

equazione:

$$\cancel{h}\left(\frac{h}{\sqrt{3}\cos x+\operatorname{sen}x}+\frac{h\sqrt{3}}{\cos x+\sqrt{3}\operatorname{sen}x}\right)=k\cdot\frac{h}{\sqrt{3}\cos x+\operatorname{sen}x}\cdot\frac{h\sqrt{3}}{\cos x+\sqrt{3}\operatorname{sen}x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}\cos x+\operatorname{sen}x}+\frac{\sqrt{3}}{\cos x+\sqrt{3}\operatorname{sen}x}=\frac{k\sqrt{3}}{(\sqrt{3}\cos x+\operatorname{sen}x)(\cos x+\sqrt{3}\operatorname{sen}x)}$$

$\cos x+\sqrt{3}\operatorname{sen}x+\sqrt{3}\operatorname{sen}x+3\cos x=k\sqrt{3}$

$4\cos x+2\sqrt{3}\operatorname{sen}x=k\sqrt{3}$ eq. lineare in seno e coseno completa.

pongo $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$

applico le formule parametriche:

67 $4\,\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 2\sqrt{3}\cdot\dfrac{2t}{1+t^2} = k\sqrt{3}$

$4 - 4t^2 + 4t\sqrt{3} = k\sqrt{3} + k\sqrt{3}\,t^2$

$$\begin{cases}(4+k\sqrt{3})t^2 - 4\sqrt{3}\,t - 4 + k\sqrt{3} = 0\\ 0 \le t \le 1\end{cases}$$

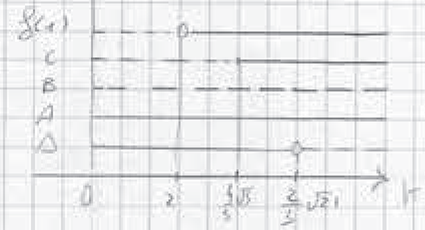
$\frac{1}{4}\Delta = 12 + (4+k\sqrt{3})(4-k\sqrt{3}) = 28 - k^2\sqrt{3} \ge 0$ per $0 < k < \frac{2}{3}\sqrt{21}$

$A = 4 + k\sqrt{3} \ge 0$ per $k \ge -\frac{4}{3}\sqrt{3}$

$B = -4\sqrt{3} < 0 \;\forall k$

$C = -4 + k\sqrt{3} \ge 0$ per $k \ge \frac{4}{3}\sqrt{3}$

$f(1) = \cancel{4} + k\sqrt{3} - 4\sqrt{3} \cancel{-4} + k\sqrt{3} = 2k\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = k\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \ge 0$ per $k \ge 2$



1° caso) $0 < k < 2$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, t_1 \ne t_2 \in R$

$\left.\begin{matrix}A>0\\B<0\\C<0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}t_1>0\\ t_2<0\end{matrix} \qquad \left.\begin{matrix}f(1)<0\\A>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ "1" è interno all'intervallo delle radici

Il problema non ha soluzioni.

2° caso) $k=2$ $\quad f(1)=0 \Rightarrow t_1 = 1$ et $t_2 = -\frac{B}{A} - 1 = \frac{4\sqrt{3}}{4+k\sqrt{3}} - 1 = \frac{4\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} - 1 = 4\sqrt{3} - 4 - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 4 < 0$

Il problema ~~non~~ ha 1 soluzione data dal lim. sup. fig. degenere

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = 90°$

3° caso) $2 < k < \frac{4}{3}\sqrt{3}$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, t_1 \ne t_2 \in R$

$\left.\begin{matrix}A>0\\B<0\\C<0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}t_1>0\\ t_2<0\end{matrix} \qquad \left.\begin{matrix}f(1)>0\\A>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ "1" è esterno all'intervallo delle radici

Il problema ha una sola soluzione data dalla radice più grande.

4° caso) $k = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ $\quad C = 0 \Rightarrow (4+k\sqrt{3})t^2 - 4\sqrt{3}\,t = 0$

$8t^2 - 4\sqrt{3}\,t = 0$

$4t^2 - \sqrt{3}\,t = 0$

$t = 0$

$t_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Il problema ha due soluzioni di cui una è data dal lim. sup. fig. degenere.

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0$

5° caso) $\frac{4}{3}\sqrt{3} < k < \frac{2}{3}\sqrt{21}$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, t_1 \ne t_2 \in R$

$\left.\begin{matrix}A>0\\B<0\\C>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}t_1>0\\ t_2>0\end{matrix} \qquad \left.\begin{matrix}f(1)>0\\A>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ "1" è esterno all'intervallo delle radici

$-\frac{B}{2A} > 1 \Rightarrow -\frac{B}{2A} - 1 \ge 0 \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{4+k\sqrt{3}} - 1 \ge 0 \Rightarrow 2\sqrt{3} - 4 - k\sqrt{3} \ge 0 \Rightarrow -k\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4 \ge 0 \Rightarrow k \le \frac{2\sqrt{3}-4}{\sqrt{3}}$.

Il problema ha due soluzioni.

6° caso) $k = \frac{2}{3}\sqrt{21}$ $\quad \Delta = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = -\frac{B}{2A} = \frac{2\sqrt{3}}{4+k\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{4+\frac{2}{3}\sqrt{63}} = \frac{2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{7}}$.

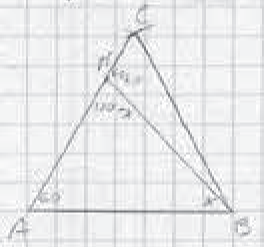
Il problema ha 2 soluzioni coincidenti.

7:) $K > \frac{2}{3}\sqrt{21}$ $\quad \Delta < 0$

Il problema non ha soluzione perché le radici non sono reali.

Es n° 110 pag 425 Problema

Dato un triangolo equilatero ABC di lato a, determinare nel lato AC un punto M in modo che la somma dei quadrati delle sue distanze dai vertici A e B abbia rapporto K con il quadrato del lato del triangolo. Discussione. Si assuma come incognita la misura dell'angolo $A\hat{B}M$.



$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = a$

pongo $A\hat{B}M = x \Rightarrow 0 \leq x \leq 60°$

applico il corollario del teorema dei seni per trovare sia $\overline{MA}$ e $\overline{MB}$

$\overline{MA} : \operatorname{sen} x = \overline{AB} : \operatorname{sen}(120-x)$

$$\overline{MA} = \frac{\operatorname{sen} x \cdot AB}{\operatorname{sen}(120-x)} = \frac{a \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}120° \cos x - \cos 120 \operatorname{sen} x} = \frac{a \operatorname{sen} x}{\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x} = \frac{2a \operatorname{sen} x}{\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x}$$

$\overline{MB} : \operatorname{sen} 60° = \overline{AB} : \operatorname{sen}(120-x)$

$$MB = \frac{AB \cdot \operatorname{sen} 60°}{\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x} = \frac{\frac{1}{2} a\sqrt{3}}{\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x)} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x}$$

equazione

$$\left(\frac{4a^2 \operatorname{sen}^2 x}{3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x} + \frac{3a^2}{3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x} \right) \frac{1}{a^2} = K$$

$$\frac{4\operatorname{sen}^2 x + 3}{3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x} = K$$

il denominatore si annulla per $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, che non si verifica mai.

$4\operatorname{sen}^2 x + 3 = 3K\cos^2 x + 2K\sqrt{3}\cos x \operatorname{sen} x + K\operatorname{sen}^2 x$

$K\operatorname{sen}^2 x - 4\operatorname{sen}^2 x + 2K\sqrt{3}\cos x \operatorname{sen} x + 3K\cos^2 x - 3 = 0$ eq. pa. di 2° grado in seno e coseno completa che si può rendere omogenea

$K\operatorname{sen}^2 x - 4\operatorname{sen}^2 x + 2K\sqrt{3}\cos x \operatorname{sen} x + 3K\cos^2 x - 3(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) = 0$

$(K-7)\operatorname{sen}^2 x + 2K\sqrt{3}\operatorname{sen} x \cos x + (3K-3)\cos^2 x = 0$

se è $K \neq 7$ non può esistere un angolo α che annulla il coseno e nello stesso tempo risolve l'equazione e allora dividendo ambo i membri dell'eq. per $\cos^2 x$ ottengo una eq. equivalente alla data.

$$\begin{cases}(k-7)\,tg^2x+2k\sqrt3\,tg\,x+3k-3=0\\ 0<tg\,x<\sqrt3\end{cases}$$

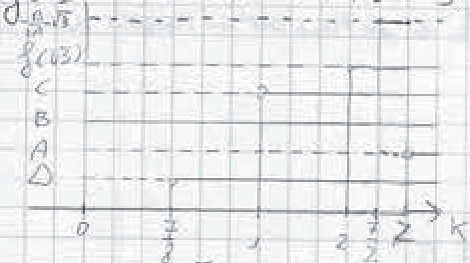
$\frac{1}{4}\Delta=3k^2+(7-k)(3k-3)=\cancel{3k^2}+21k-21\cancel{-3k^2}+3k=24k-21\geq0$ per $k\geq\frac78$

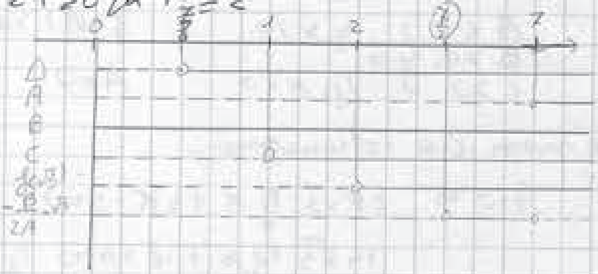
$A=k-7\geq0$ per $k\geq7$

$B=2k\sqrt3\geq0$ per $k\geq0$

$C=3k-3\geq0$ per $k\geq1$

$f(\sqrt3)=3k-21+6k+3k-3=12k-24\geq0$ per $k\geq2$





1° caso) $0<k<\frac78$ $\quad\Delta<0$

Il problema non ha soluzioni perchè le radici non sono reali

2° caso) $k=\frac78$ $\quad\Delta=0\Rightarrow\exists\, tg_1x=tg_2x=-\frac{B}{2A}=-\frac{k\sqrt3}{k-7}=-\frac{k\sqrt3}{k-7}=-\frac{\frac78\sqrt3}{-\frac{49}{8}}=\frac17\sqrt3.$

Il problema ha due soluzioni coincidenti.

3° caso) $\frac78<k<1$ $\quad\Delta>0\Rightarrow\exists\, tg_1x\neq tg_2x\in R$

$$\left.\begin{matrix}A<0\\B>0\\C<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{matrix}tg_1x>0\\ tg_2x>0\end{matrix}\qquad\left.\begin{matrix}f(\sqrt3)<0\\A<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$ "$\sqrt3$" è esterno all'intervallo delle radici

$-\frac{B}{2A}-\sqrt3<0\Rightarrow-\frac{B}{2A}<\sqrt3$

Il problema ha due soluzioni.

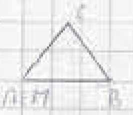
4° caso) $k=1$ $\quad C=0\Rightarrow(k-7)\,tg^2x+2k\sqrt3\,tg\,x=0$

$$-6\,tg^2x+2\sqrt3\,tg\,x=0$$
$$-3\,tg^2x+\sqrt3\,tg\,x=0$$
$$tg_1x=0$$
$$tg_2x=\frac13\sqrt3$$

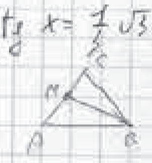
Il problema ha due soluzioni di cui una del limite inferiore.

Le figure si specializzano così:

$tg\,x=0\Rightarrow x=0$



$tg\,x=\frac13\sqrt3\Rightarrow x=30°$



MB è in questo caso una altezza del triangolo.

5° caso) $1<k<2$ $\quad\Delta>0\Rightarrow tg_1x\neq tg_2x\in R$

$$\left.\begin{matrix}A<0\\B<0\\C>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{matrix}tg_1x<0\\ tg_2x>0\end{matrix}\qquad\left.\begin{matrix}f(\sqrt3)<0\\A<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$ "$\sqrt3$" è esterno all'intervallo delle radici

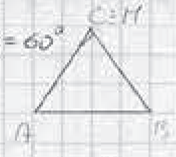
Il problema ha una sola soluzione data dalla radice più grande

6° caso) $k = 2$ $\quad f(\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow tg_1 x = \sqrt{3}$ et $tg_2 x = -\frac{\sqrt{3}}{A} - \sqrt{3} = -\frac{2k\sqrt{3}}{k-7} - \sqrt{3} =$

$$= \frac{-4\sqrt{3}}{-5} - \sqrt{3} = \frac{4}{5}\sqrt{3} - \sqrt{3} < 0$$

Il problema ha una sola soluzione dato dal limite superiore. La fig. si riduce a

$tg\, x = \sqrt{3} \Rightarrow x = 60°$



7° caso) $2 < k < 7$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\ tg_1 x \in tg_2 x \in R$

$$\left.\begin{array}{l} A < 0 \\ B > 0 \\ C > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} tg_1 x > 0 \\ tg_2 x < 0 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} f(\sqrt{3}) > 0 \\ A < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ "$\sqrt{3}$" è interno all'intervallo delle radici

Il problema non ha soluzioni.

8° caso) $k = 7$ $\quad A = 0 \Rightarrow 2k\sqrt{3}\ tg\, x + 3k - 3 = 0$

$$14\sqrt{3}\ tg\, x + 18 = 0 \Rightarrow tg\, x = -\frac{18}{14}\sqrt{3}$$

Il problema non ha soluzioni

9° caso) $k > 7$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\ tg_1 x \neq tg_2 \in R$

$$\left.\begin{array}{l} A > 0 \\ B > 0 \\ C > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} tg_1 x < 0 \\ tg_2 x < 0 \end{array}$$

Il problema non ha soluzioni.

45 Esercizi sulle frazioni algebriche

(1) $\left(\frac{2}{a}-\frac{a-b}{a^2}-\frac{a+b}{ab}\right):\left(\frac{2a+3b}{ab}-\frac{2}{a}-\frac{3}{b}\right)=$

$\left(\frac{2ab-ab+b^2-a^2-ab}{a^2b}\right):\left(\frac{2a+3b-2b-3a}{ab}\right)=\frac{-a^2+b^2}{a^2b}:\frac{-a+b}{ab}=\frac{b^2-a^2}{a^2b}\cdot\frac{ab}{b-a}=\frac{b-a}{a}$

(2) $\left(\frac{a}{b^2}-\frac{a^2-ab+b^2}{a^2b}-\frac{a^3-a^2b-b^3}{a^2b^2}\right):\frac{1}{b}=$

$=\left(\frac{\cancel{a^3}-\cancel{a^2b}+ab^2-\cancel{b^3}-\cancel{a^3}+\cancel{a^2b}+\cancel{b^3}}{a^2b^2}\right)\cdot b=\frac{\cancel{a}\cancel{b^2}}{a^{\cancel{2}}\cancel{b^2}}\cdot b=\frac{b}{a}$

(3) $\left(\frac{b}{a^2+ab}-\frac{a}{ab+b^2}\right)\left(\frac{b}{a^2-ab}+\frac{a+b}{ab}\right)=\left(\frac{b}{a(a+b)}-\frac{a}{b(a+b)}\right)\left(\frac{b}{a(a-b)}+\frac{a+b}{ab}\right)=$

$=\frac{b^2-a^2}{ab(a+b)}\cdot\frac{\cancel{b^2}+a^2-\cancel{b^2}}{ab(a-b)}=\frac{b^2-a^2}{ab(a+b)}\cdot\frac{a^2}{ab(a-b)}=-\frac{\cancel{(a+b)}\cancel{(a-b)}}{\cancel{a}b\cancel{(a+b)}}\cdot\frac{\cancel{a^2}}{\cancel{a}b\cancel{(a-b)}}=-\frac{1}{b^2}$

(4) $\frac{1}{a}:\left(\frac{a-3b}{ab}+\frac{a+b}{a^2}-\frac{b^3-2ab^2}{a^2b^2}\right)=\frac{1}{a}:\left(\frac{a^2\cancel{b}-3\cancel{ab^2}+\cancel{ab^2}+\cancel{b^3}-\cancel{b^3}+2\cancel{ab^2}}{a^2b^2}\right)=$

$\frac{1}{\cancel{a}}\cdot\frac{a^2\cancel{b^2}}{\cancel{ab^2}}=1$

(5) $\left(\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a^2-3a+2}\right)^2\left(a+\frac{4}{a}-4\right)=\left(\frac{1}{a-1}+\frac{1}{(a-1)(a-2)}\right)^2\left(\frac{a^2+4-4a}{a}\right)=$

$=\left(\frac{a-2+1}{(a-1)(a-2)}\right)^2\left(\frac{(a-2)^2}{a}\right)=\frac{\cancel{(a-1)^2}}{\cancel{(a-1)^2}\cancel{(a-2)^2}}\cdot\frac{\cancel{(a-2)^2}}{a}=\frac{1}{a}$

(6) $\left(\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}-\frac{2x^2+2}{x^2-1}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\left(\frac{x^2+\cancel{2x}+1+x^2-\cancel{2x}+1-(2x^2+2)}{(x+1)(x-1)}\right):\left(\frac{b-a}{ab}\right)=$

$=\frac{\cancel{2x^2}+\cancel{2}-\cancel{2x^2}-\cancel{2}}{(x+1)(x-1)}\cdot\frac{ab}{b-a}=0$

(7) $\left(\frac{2x+1}{x^2-3x+2}-\frac{x+3}{x-2}+\frac{x+1}{x-1}\right):\left(x-\frac{x^2-x-1}{x-1}\right)=\left(\frac{2x+1}{(x-2)(x-1)}-\frac{x+3}{x-2}+\frac{x+1}{x-1}\right):\left(\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x}-\cancel{x^2}+\cancel{x}+1}{x-1}\right)=$

$=\frac{2x+1-(x+3)(x-1)+(x+1)(x-2)}{(x-2)(x-1)}\cdot\frac{x-1}{1}=\frac{\cancel{2x}+1-\cancel{x^2}-\cancel{2x}+3+\cancel{x^2}-x-2}{(x-2)(x-1)}\cdot x-1=$

$=\frac{-x+2}{(x-2)(x-1)}\cdot x-1=-\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x-1)}}\cdot\cancel{x-1}=-1$

(8) $\left(\frac{a+2b}{2a}+\frac{5a-b}{3b}-\frac{2a^2+b^2}{ab}\right)^2:\left[\frac{3a-b}{3a}+\frac{a-2b}{12b}-\frac{(a+b)(3a-4b)}{36ab}\right]=$

$\left(\frac{3ab+\cancel{6b^2}+10a^2-2ab-12a^2-\cancel{6b^2}}{6ab}\right):\left[\frac{12ab-\cancel{4b^2}+\cancel{3a^2}-6ab-\cancel{3a^2}+ab+\cancel{4b^2}}{36ab}\right]=$

$\frac{ab}{6ab}:\left[\frac{7ab}{36ab}\right]=\frac{1}{6}\cdot\frac{\cancel{36}^{6}}{7}=\frac{6}{7}$

Esercizi sulle equazioni fratte

(1) $\frac{x+1}{x-1} - 3 = \frac{2-x}{x}$

m.c $= x(x-1)$ con $x \neq 0$ et $x \neq 1$

$x^2+x-3x^2+3x = (2-x)(x-1)$

$-2x^2+4x = 2x-2-x^2+x$

$x^2-x-2=0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} <$ $x_1=-1$ accettabile, $x_2 = 2$ accettabile

(2) $\frac{x-3}{x^2-x} - \frac{x+3}{x^2+x} = \frac{2-3x}{x^2-1}$

$\frac{x-3}{x(x-1)} - \frac{x+3}{x(x+1)} = \frac{2-3x}{(x+1)(x-1)}$

m.c $= x(x-1)(x+1)$ con $x \neq 0$ et $x \neq \pm 1$

$(x-3)(x+1)+(1-x)(x+3)+(3x-2)x=0$

$\cancel{x^2}-2x-\cancel{3}-\cancel{x^2}-2x+\cancel{3}+3x^2-2x=0$

$3x^2-6x=0$

$x=0$ non accettabile

$x=2$ accettabile

(3) $\frac{x+1}{x-2} - \frac{4}{x+1} = \frac{5x-3}{(x-2)(x+1)}$

m.c $= (x+1)(x-2)$ con $x \neq 2$ et $x \neq -1$

$x^2+2x+1-4x+8-5x+3=0$

$x^2-7x+12=0$

$x = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} <$ $x_1 = 3$ accettabile, $x_2 = 4$ accettabile

(4) $\frac{2x-5}{x+3} - \frac{3x+1}{x-1} = \frac{x-4}{2x+6}$

$\frac{2x-5}{x+3} - \frac{3x+1}{x-1} = \frac{x-4}{2(x+3)}$

m.c $= 2(x-1)(x+3)$ con $x \neq 1$ et $x \neq -3$

$(2x-2)(2x-5)-(2x+6)(3x+1)=(x-4)(x-1)$

$4x^2-14x+\cancel{10}-6x^2-20x-\cancel{6} = x^2-5x+\cancel{4}$

$3x^2+29x=0$

$x=0$ accettabile

$x=-\frac{29}{3}$ accettabile

50

(5) $\dfrac{2x}{x+2} = 2 - \dfrac{x+2}{2x}$

m.c $= 2x(x+2)$ con $x \neq 0$ et $x \neq -2$

$4x^2 = 2x^2 + \cancel{4x} - x^2 - \cancel{4x} - 4$

$3x^2 = -4$ impossibile

(6) $\dfrac{8}{x+6} + \dfrac{12-x}{x-6} = 1$

m.c $= (x+6)(x-6)$ con $x \neq \pm 6$

$8x - 48 + (12-x)(x+6) = x^2 - 36$

$8x - 48 - x^2 + 6x + 72 = x^2 - 36$

$2x^2 - 14x - 60 = 0$

$x^2 - 7x - 30 = 0$

$x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49+120}}{2} = \dfrac{7 \pm 13}{2} < \begin{matrix} x_1 = -3 & \text{accettabile} \\ x_2 = 10 & \text{accettabile} \end{matrix}$

(7) $\dfrac{1}{2x+2} - \dfrac{x}{2x-2} = \dfrac{x+2}{x^2-1}$

$\dfrac{1}{2(x+1)} - \dfrac{x}{2(x-1)} = \dfrac{x+2}{(x+1)(x-1)}$

m.c $= 2(x-1)(x+1)$ con $x \neq \pm 1$

$\cancel{x} - 1 - x^2 - \cancel{x} = x + 2$

$x^2 + x + 3 = 0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-12}}{2}$ impossibile

(8) $\dfrac{x}{x-3} + \dfrac{2x+1}{9-x^2} = \dfrac{1}{x+3}$

$\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{2x+1}{(x+3)(x-3)} = \dfrac{1}{x+3}$

m.c. $= (x+3)(x-3)$ con $x \neq \pm 3$

$x^2 + 3\cancel{x} - 2\cancel{x} + 1 = \cancel{x} - 3$

$x^2 = -4$ impossibile

(9) $\dfrac{3x+1}{4x+3} - \dfrac{1}{x} = 3$

m.c. $= x(4x+3)$ con $x \neq 0$ et $x \neq -\frac{3}{4}$

$3x^2 + x - 4x - 3 = (4x^2 + 3x) \cdot 3$

$\cancel{x^2 \ldots = 0}$ $\quad 3x^2 + x - 4x - 3 = 12x^2 + 9x$

$\cancel{x = \ldots \pm \sqrt{\ldots}}$ $\quad 9x^2 + 12x + 3 = 0$

$3x^2 + 4x + 1 = 0$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-3}}{3} = \dfrac{-2 \pm 1}{3} < \begin{matrix} x_1 = -1 & \text{accettabile} \\ x_2 = -\frac{1}{3} & \text{accettabile} \end{matrix}$

Esercizio:

Trovare l'area del triangolo sapendo che: $a=15$; $b=36$; $c=39$

Di detto triangolo determinare gli angoli.

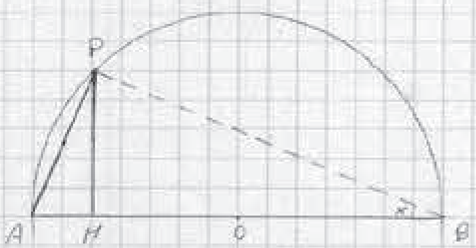
$a=15$
$b=36$
$c=39$
$2p=90 \Rightarrow p=45$

$$s=\sqrt{45(45-15)(45-36)(45-39)}=\sqrt{45\cdot 30\cdot 9\cdot 6}=270\ m^2$$

Es. n° 102 pag 424 — Problema:

Data una semicirconferenza il cui diametro AB misura $2r$, determinare su di essa un punto P in modo che, detta H la sua proiezione sul diametro, si abbia:

$\overline{AP}+\overline{HB}=k$ essendo k un numero reale e positivo.



$\overline{AB}=2r$

pongo $P\hat{B}A=x \Rightarrow 0\le x\le 90°$

$\overline{AP}=2r\,\text{sen}\,x$

$\overline{PB}=2r\cos x$

$\overline{HB}=2r\cos x\cdot\cos x=2r\cos^2 x$

$2r\,\text{sen}\,x+2r\cos^2 x=k$

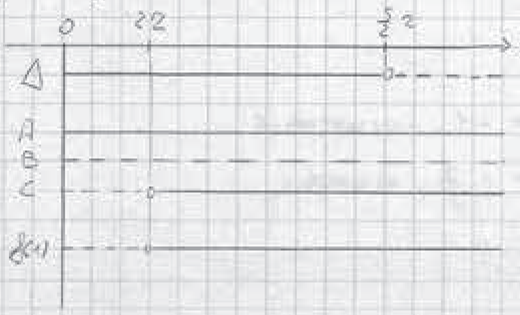
$2r\,\text{sen}\,x+2r-2r\,\text{sen}^2 x-k=0$

$$\begin{cases}2r\,\text{sen}^2 x-2r\,\text{sen}\,x+k-2r=0\\ 0\le \text{sen}\,x\le 1\end{cases}$$

$\frac{1}{4}\Delta=r^2-2r(k-2r)=r^2-2kr+4r^2=5r-2k\ge 0$ per $k\le\frac{5}{2}r$

$A=2r>0\ \forall k$
$B=-2r<0\ \forall k$
$C=k-2r\ge 0$ per $k\ge 2r$

$f(1)=2r-2r+k-2r=k-2r\ge 0$ per $k\ge 2r$



1° caso) $0 < K < 2r$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists \ \sin_1 x \neq \sin_2 x \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} A>0 \\ B<0 \\ C<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \sin_1 x > 0 \\ \\ \sin_2 x < 0 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} f(1) < 0 \\ \\ A > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{"1" è interno all'intervallo delle radici.}$$

Il problema non ha soluzioni perchè le radici non soddisfano le limitazioni.

2° caso) $K = 2r$ $\quad f(1) = 0 \Rightarrow \sin_1 x = 1$ e $\sin_2 x = -\frac{B}{A} - 1 = 1 - 1 = 0$

Il problema ha due soluzioni date dai limiti. Le figure si presentano così:

$\sin x = 1 \Rightarrow x = 90°$ $\qquad\qquad$ $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0$

3° caso) $2r < K < \frac{5}{2} r$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists \ \sin_1 x \neq \sin_2 x \in \mathbb{R}$

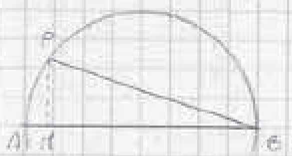
$$\left.\begin{array}{l} A>0 \\ B<0 \\ C>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \sin_1 x > 0 \\ \\ \sin_2 x > 0 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} f(1) > 0 \\ \\ A > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{"1" è esterno all'intervallo delle radici}$$

$-\frac{B}{2A} = \frac{1}{2}$ che è minore di 1

Il problema ha due soluzioni.

4° caso) $K = \frac{5}{2} r$ $\quad \Delta = 0 \Rightarrow \exists \ \sin_1 x = \sin_2 x = -\frac{B}{2A} = \frac{1}{2}$.

Il problema ha due soluzioni coincidenti e la figura si presenta così:



5° caso) $K > \frac{5}{2} r$ $\quad \Delta < 0$

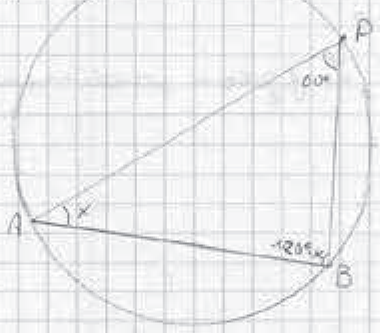
Il problema non ha soluzioni perchè le radici non sono reali.

Problema

Data una circonferenza di diametro $2\,2$, determinare una corda AB di misura $2\sqrt{3}$ e un punto P nell'arco maggiore (e nell'arco minore) in modo che:

$$\overline{AP} + 2\overline{PB} = k2$$

(I caso)



$\overline{AB} = 2\sqrt{3}$ (quindi è il lato del triangolo equilatero inscritto).

pongo $P\hat{A}B = x \Rightarrow 0 < x \leq 120°$

$\overline{AP} = 2\,2(\operatorname{sen}(120-x)) = 2\,2(\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x) = 2(\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x)$

$\overline{PB} = 2\,2 \operatorname{sen} x$

$2(\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x) + 4\,2 \operatorname{sen} x = k2$

$\begin{cases} \sqrt{3}\cos x + 5\operatorname{sen} x = k \\ 0 < x \leq 120° \end{cases}$ eq. lineare in sen e cos.

applico le formule parametriche;
pongo $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$

$\sqrt{3}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5\cdot\frac{2t}{1+t^2} = k$

$\sqrt{3} - t^2\sqrt{3} + 10t - kt^2 - k = 0$

$t^2\sqrt{3} + kt^2 - 10t + k - \sqrt{3} = 0$

$\begin{cases} (k+\sqrt{3})t^2 - 10t + k - \sqrt{3} = 0 \\ 0 < t \leq \sqrt{3} \end{cases}$

$\frac{1}{4}\Delta = 25 - k^2 + 3 = -k^2 + 28 \geq 0$ per $k^2 - 28 \leq 0$ per $k^2 \leq 28$

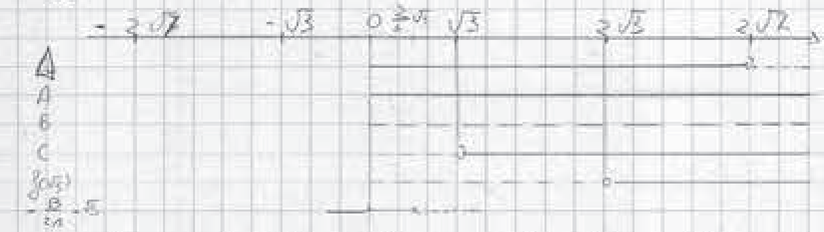
$\Delta \geq 0$ per $-\sqrt{28} \leq k \leq \sqrt{28}$ per $-2\sqrt{7} \leq k \leq 2\sqrt{7}$

$A = k + \sqrt{3} \geq 0$ per $k \geq -\sqrt{3}$

$B = -10 < 0\ \forall k$

$C = k - \sqrt{3} \geq 0$ per $k \geq \sqrt{3}$

$f(\sqrt{3}) = 3k + 3\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + k - \sqrt{3} = 4k - 8\sqrt{3} \geq 0$ per $k \geq 2\sqrt{3}$



1° caso) $0 < k < \sqrt{3}$ $\Delta > 0 \Rightarrow \exists\, t_1 \neq t_2 \in \mathbb{R}$

$\left.\begin{matrix} A > 0 \\ B < 0 \\ C < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} t_1 > 0 \\ t_2 < 0 \end{matrix}$ $\left.\begin{matrix} f(\sqrt{3}) < 0 \\ A > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ "$\sqrt{3}$" è interno all'intervallo delle radici

Il problema non ha soluzioni perchè le radici non soddisfano le limitazioni

2° caso) $K = \sqrt{3}$ $\quad C = 0 \Rightarrow (K+\sqrt{3})t^2 - 10t = 0$

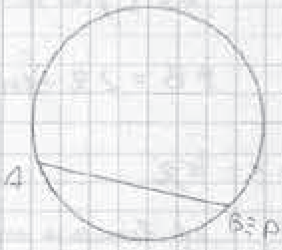
$$\sqrt{3}\,t^2 - 5t = 0$$

$$t_1 = 0$$

$$t_2 = \frac{5}{3}\sqrt{3} \quad \text{non accettabile}$$

Il problema ha una sola soluzione data dal limite inferiore. La figura si specializza così:

per $t = 0 \Rightarrow tg\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0$



3° caso) $\sqrt{3} < K < 2\sqrt{3}$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, t_1 \neq t_2 \in R$

$\left.\begin{array}{l} A > 0 \\ B < 0 \\ C > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} t_1 > 0 \\ t_2 > 0 \end{array}$ $\quad \left.\begin{array}{l} f(\sqrt{3}) < 0 \\ A > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ "$\sqrt{3}$" è interno all'intervallo delle radici

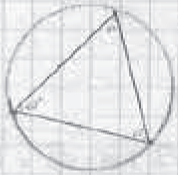
Il problema ha una sola soluzione data dalla radice più piccola.

4° caso) $K = 2\sqrt{3}$ $\quad f(\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow t_1 = \sqrt{3}$ et $t_2 = -\frac{B}{A} - \sqrt{3} = \frac{10}{3\sqrt{3}} - \sqrt{3} = \frac{10-9}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

Il problema ha due soluzioni di cui una data dal limite superiore.

Le figure si specializzano così:

per $t = \sqrt{3} \Rightarrow tg\frac{x}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{x}{2} = 60° \Rightarrow x = 120°$ $\qquad$ per $t = \frac{1}{3}\sqrt{3} \Rightarrow tg\frac{x}{2} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \Rightarrow \frac{x}{2} = 30° \Rightarrow x = 60°$



5° caso) $2\sqrt{3} < K < 2\sqrt{7}$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, t_1 \neq t_2 \in R$

$\left.\begin{array}{l} A > 0 \\ B < 0 \\ C > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} t_1 > 0 \\ t_2 > 0 \end{array}$ $\quad \left.\begin{array}{l} f(\sqrt{3}) > 0 \\ A > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ "$\sqrt{3}$" è esterno all'intervallo delle radici

$-\frac{B}{2A} - \sqrt{3} < 0 \Rightarrow -\frac{B}{2A} < \sqrt{3}$

Il problema ha 2 soluzioni.

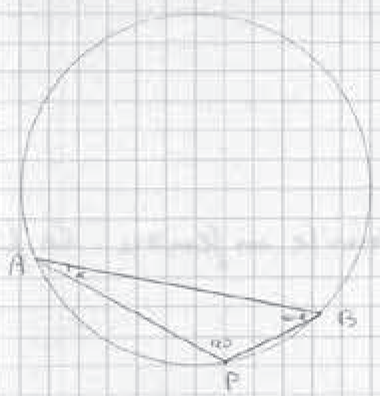
6° caso) $K = 2\sqrt{7}$ $\quad \Delta = 0 \Rightarrow \exists\, t_1 = t_2 = -\frac{B}{2A} = \frac{5}{K+\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{7}+\sqrt{3}} < \sqrt{3}$

Il problema ha due soluzioni coincidenti.

7° caso) $K > 2\sqrt{7}$ $\quad \Delta < 0$

Il problema non ha soluzioni perchè le radici non sono reali.

(II caso)



$AB = 2\sqrt{3}$ (quindi è il lato del triangolo equilatero inscritto).

$$\boxed{\overline{AP} + 2\,\overline{PB} = k2}$$

pongo $P\hat{A}B = x \Rightarrow 0 \le x \le 60°$

$AP = 22\,\text{sen}(60° - x) = 22(\text{sen}\,60° \cos x - \cos 60°\,\text{sen}\,x) =$
$= \cancel{2}2\left(\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{3}\cos x - \frac{1}{\cancel{2}}\text{sen}\,x\right) = 2(\sqrt{3}\cos x - \text{sen}\,x).$

$PB = 22\,\text{sen}\,x$

$\cancel{2}(\sqrt{3}\cos x - \text{sen}\,x) + 4\cancel{2}\,\text{sen}\,x = k\cancel{2}$

$\begin{cases} \sqrt{3}\cos x - 3\,\text{sen}\,x - k = 0 \\ 0 \le x \le 60° \end{cases}$ eq. lineare in seno e coseno.

applico le formule parametriche:

pongo $\text{tg}\,\frac{x}{2} = t$;

$\sqrt{3}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} - 3\,\frac{2t}{1+t^2} - k = 0$

$\sqrt{3} - t^2\sqrt{3} - 6t - k - kt^2 = 0$

$\begin{cases} (k+\sqrt{3})t^2 + 6t + k - \sqrt{3} = 0 \\ 0 \le t \le \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{cases}$

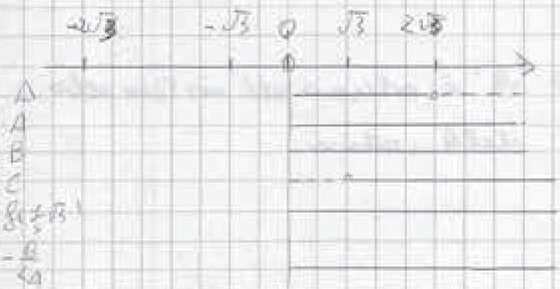
$\frac{1}{4}\Delta = +9 - k^2 + 3 = -k^2 + 12 \ge 0 \Rightarrow -\sqrt{12} < k < \sqrt{12} \Rightarrow -2\sqrt{3} < k < 2\sqrt{3}$

$A = k + \sqrt{3} \ge 0$ per $k \ge -\sqrt{3}$

$B = 6 > 0\ \forall k$

$C = k - \sqrt{3} \ge 0$ per $k \ge \sqrt{3}$

$f\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{3}k + \frac{1}{3}\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + k - \sqrt{3} = k + \sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 3k - 3\sqrt{3} = 4k + 4\sqrt{3} \ge 0$ per $k \ge -\sqrt{3}$



1° caso) $0 < k < \sqrt{3}$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, t_1 \ne t_2 \in \mathbb{R}$

$\left.\begin{matrix} A > 0 \\ B > 0 \\ C < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} t_1 < 0 \\ t_2 > 0 \end{matrix}$ $\qquad \left.\begin{matrix} f(\frac{1}{3}\sqrt{3}) > 0 \\ A > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ "$\frac{1}{3}\sqrt{3}$" è esterno all'intervallo delle radici.

Il problema ha una sola soluzione.

2° caso) $k = \sqrt{3}$ $\quad C = 0 \Rightarrow (k+\sqrt{3})t^2 + 6t = 0$

$\sqrt{3}t^2 + 3t = 0$

$t_1 = 0$

$t_2 = \sqrt{3}$ no

Il problema ha una sola soluzione data dal limite inferiore.
La figura si visualizza così.

per $t = 0 \Rightarrow \tg \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0$

3° caso) $\sqrt{3} < k < 2\sqrt{3}$ $\Delta > 0 \Rightarrow \exists\ t_1 \neq t_2 \in \mathbb{R}$

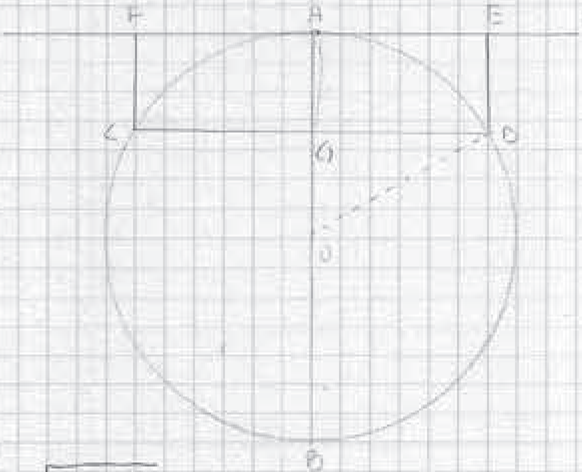
$$\left.\begin{array}{l} A > 0 \\ B > 0 \\ C > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} t_1 < 0 \\ \\ t_2 < 0 \end{array}$$

Il problema non ha soluzioni perché le radici non soddisfano le limitazioni

4° caso) $k = 2\sqrt{3}$ $\Delta = 0 \Rightarrow \exists\ t_1 = t_2 = -\frac{B}{2A} = -\frac{3}{k+\sqrt{3}} = \cancel{\cdots} < 0 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ no.

Il problema non ha soluzioni perché le radici coincidenti non soddisfano le limitazioni.

Problema:



$\overline{AB} = 2r$

$2\overline{FC} + 2\overline{CD} = 2p$

pongo $\overline{AG} = x \Rightarrow 0 \leq x \leq 2r$

$\overline{GO} = r - x$

$\overline{GD} = \sqrt{2rx - x^2}$

$2\sqrt{2rx - x^2} + x = p$

$2\sqrt{2rx - x^2} = p - x$

$8rx - 4x^2 = p^2 - 2px + x^2$

$\begin{cases} 5x^2 - 8rx - 2px + p^2 = 0 \\ 0 \leq x \leq 2r \end{cases}$

$5x^2 - 2(4r + p)x + p^2 = 0$

$\frac{1}{4}\Delta = (4r+p)^2 - 5p^2 = 16r^2 + 8rp + p^2 - 5p^2 = -4p^2 + 8rp + 16r^2 \geq 0$ se $p^2 - 2rp - 4r^2 \leq 0$

$p = r \pm \sqrt{r^2 + 4r^2} = r \pm r\sqrt{5}$

$\Delta \geq 0$ se $0 < p \leq r + r\sqrt{5}$

$A = 5 > 0 \ \forall p$

$B = -2(4r + p) \geq 0$ se $4r + p \leq 0$ se $p \leq -4r$

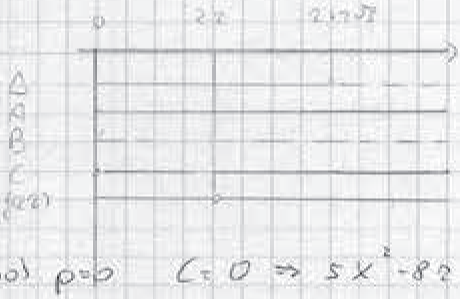
$C = p^2 \geq 0$

$f(2r) = 20r^2 - 16r^2 - 4pr + p^2 = p^2 - 4rp + 4r^2$.

$p = 2r \pm \sqrt{4r^2 - 4r^2} = 2r$.

$f(2r) \geq 0 \ \forall p$

$f(2r) = 0$ se $p = 2r$



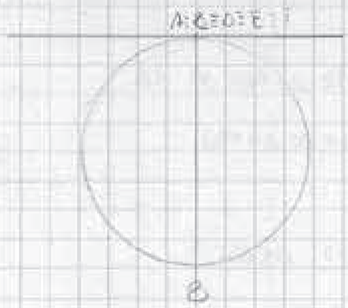
1° caso) $p = 0$ $\quad C = 0 \Rightarrow 5x^2 - 8rx = 0$

$x = 0$

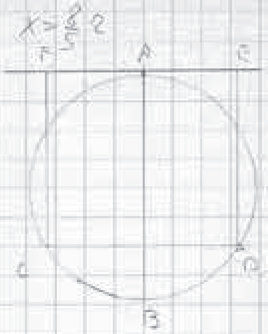
$x = \frac{8}{5}r$

Il problema ha due soluzioni di cui una è zero del limite inferiore.
Le figure si riducono così

$x = 0$



$x = \frac{8}{5} r$



2° caso) $0 < p < 2r$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in R$

$\left.\begin{array}{l} A>0 \\ B<0 \\ C>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1>0 \\ x_2>0 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} f(2r)>0 \\ A>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ "2r" è esterno all'intervallo delle radici

$-\frac{B}{2A} < 2r.$

Il problema ha due soluzioni.

3° caso) $p = 2r$ $\quad f(2r) = 0 \Rightarrow x = 2r$ et $x = -\frac{B}{A} - 2r = +\frac{8r+2p}{5} - 2r = \frac{12}{5} r - 2r = \frac{2}{5} r.$

Il problema ha due soluzioni. Le figure si generalizzano così:

4° caso) $2r < p < r + r\sqrt{5}$ $\quad \Delta > 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in R$

$\left.\begin{array}{l} A>0 \\ B<0 \\ C>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1>0 \\ x_2>0 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} f(2r)>0 \\ A>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ "2r" è esterno all'intervallo delle radici

$-\frac{B}{2A} < 2r$

Il problema ha due soluzioni.

5° caso) $p = r + r\sqrt{5}$ $\quad \Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{B}{2A} = \frac{4r+p}{5} = \frac{5r + r\sqrt{5}}{5}$ $\quad \frac{5+\sqrt{5}}{5} r$

Il problema ha due soluzioni coincidenti.

6° caso) $p > r + r\sqrt{5}$ $\quad \Delta < 0$

Il problema non ha soluzioni perché le radici non sono reali.

AP= parte aurea di AB

P: sezione aurea

AB= 2

$AP = x \Rightarrow 0 < x < 2$

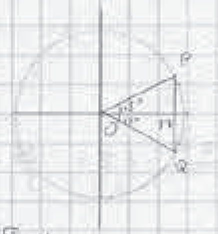
$2 : x = x : 2 - x$

$x^2 = 2^2 - 2x$

$x^2 + 2x - 2^2 = 0$

$x = \dfrac{-2 + \sqrt{2^2 + 4 \cdot 2^2}}{2} = \dfrac{-2 + 2\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \, 2$

(lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza).



$PQ = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2} \, 2$

$PH = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4} \, 2$

$\sin 18° = \dfrac{PH}{2} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$

$\cos 18° = \sqrt{1 - \left(\dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \dfrac{6 - 2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\dfrac{10 + 2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\dfrac{5 + \sqrt{5}}{8}}$

$\operatorname{tg} 18° = \dfrac{\sin 18°}{\cos 18°} = \dfrac{\frac{\sqrt{5} - 1}{4}}{\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}} \stackrel{*}{=} \sqrt{\dfrac{\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2}{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}} = \sqrt{\dfrac{6 - 2\sqrt{5}}{16} \cdot \dfrac{8}{5 + \sqrt{5}}} = \dfrac{6 - 2\sqrt{5}}{2 \cdot (5 + \sqrt{5})} = \sqrt{\dfrac{3 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}} =$

$= \sqrt{\dfrac{(3 - \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}{20}} = \sqrt{\dfrac{20 - 8\sqrt{5}}{20}} = \sqrt{\dfrac{5 - 2\sqrt{5}}{5}} = \dfrac{\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}}{5}$

* perchè $\dfrac{a}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a^2}{b}}$

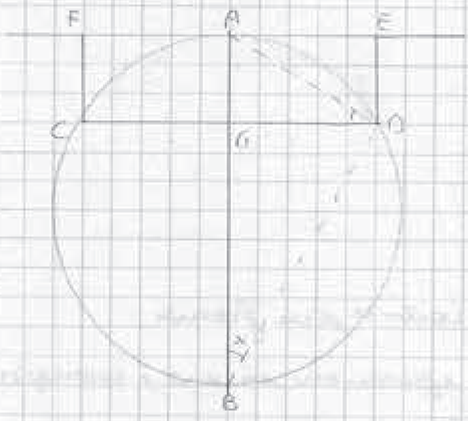
Altezze relative ai lati di un triangolo S

$S = \dfrac{ah}{2} \Rightarrow h = \dfrac{2S}{a} \Rightarrow h = \dfrac{2S}{b} \Rightarrow h = \dfrac{2S}{c}$

55 Compito del 13. 1. 1985:

in un cerchio di raggio r è tracciato il diametro AB e la tangente nel punto A. Si conduca una corda parallela alla tangente in modo che il rettangolo che ha per uno dei lati la corda ed il lato opposto sulla tangente abbia il perimetro uguale a 2p dove p è un numero non negativo.

Porre (fig. 1) $B\hat{A}D = x$
Porre (fig. 2) $A\hat{B}D = x$ $\Big\} \Rightarrow 0 \le x \le 30°$



$\overline{AB} = 2r$

$2\overline{FC} + 2\overline{CD} = 2p$

$\overline{FC} + \overline{CD} = p$

pongo $A\hat{B}D = x \Rightarrow 0 \le x \le 30°$

$AD = 2r \sin x$

$B\hat{A}D = 90° - x$

$A\hat{D}G = 180° - (90° + 90° - x) = x$

$AG = 2r \sin^2 x$

$\overline{DG} = 2r \sin x \cos x$

$\overline{FC} = AG$

$\overline{DC} = 4r \sin x \cos x$

$2r \sin^2 x + 4r \sin x \cos x = p$ eq. di secondo grado in seno e coseno che si può rendere omogenea.

$2r \sin^2 x + 4r \sin x \cos x - p(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$

$2r \sin^2 x - p \sin^2 x + 4r \sin x \cos x - p \cos^2 x = 0$

$(p - 2r) \sin^2 x - 4r \sin x \cos x + p \cos^2 x = 0$

se è $p \ne 2r$ allora non può esistere un angolo x che nello stesso tempo annulla il coseno e risolve l'equazione e allora dividendo ambo i membri dell'equazione per $\cos^2 x$ ne ottengo una equivalente.

$$\begin{cases} (p - 2r) tg^2 x - 4r \, tg x + p = 0 \\ tg x \ge 0 \end{cases}$$

$\frac{1}{4}\Delta = 4r^2 - p(p - 2r) = 4r^2 - p^2 + 2rp \ge 0$ per $p^2 - 2rp - 4r^2 \le 0$

$p = r \pm \sqrt{r^2 + 4r^2} = r \pm r\sqrt{5}$

$\Delta \ge 0$ per $0 < p \le r(1 + \sqrt{5})$

$A = p - 2r \ge 0$ per $p \ge 2r$

$B = -4r < 0 \ \forall p$

$C = p \ge 0.$

1° caso) $p=0$ $\quad C=0 \Rightarrow tg_1 x = 0$ et $tg_2 x = -\frac{B}{A} = \frac{4\ell}{p-2\ell} = -2\ell$

Il problema ha una sola soluzione data dalla soluzione limite inferiore.

La figura si modifica così:

per $tg\, x = 0 \Rightarrow x = 0$

2° caso) $0<p<2\ell$ $\quad \Delta>0 \Rightarrow \exists\, tg_1 x \neq tg_2 x \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} A<0 \\ B<0 \\ C>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} tg_1 x<0 \\ tg_2 x>0 \end{array}$$

Il problema ha una sola soluzione data dalla radice più grande.

3° caso) $p=2\ell$ $\quad$ in questo caso dobbiamo tornare alla equazione in seno e coseno perché non è più equivalente a quella in tangente:

$$-4\ell\, sen\, x \cos x + p \cos^2 x = 0$$

$$-4\ell\, sen\, x \cos x + 2\ell \cos^2 x = 0$$

$$-2\, sen\, x \cos x + \cos^2 x = 0$$

$$\cos x\, (\cos x - 2\, sen\, x) = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = 90°$$

$$\cos x - 2\, sen\, x = 0$$

poiché $\cos x = 0$ non è soluzione posso dividere per $\cos x$.

$$-2\, tg\, x + 1 = 0$$

$$tg\, x = \frac{1}{2}$$

Il problema ha due soluzioni di cui una è data dalla soluzione limite superiore.

La figura si modifica così:

per $\cos x = 0 \Rightarrow x = 90°$

4° caso) $2\ell<p<2(1+\sqrt{5})$ $\quad \Delta>0 \Rightarrow \exists\, tg_1 x \neq tg_2 x \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} A>0 \\ B<0 \\ C>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} tg_1 x>0 \\ tg_2 x>0 \end{array}$$

Il problema ha due soluzioni.

5° caso) $p=2(1+\sqrt{5})$ $\quad \Delta=0 \Rightarrow \exists\, tg_1 x = tg_2 x = -\frac{B}{2A} = \frac{2\ell}{p-2\ell} = \frac{2\ell}{2(1+\sqrt{5})-2\ell} = \frac{2\ell}{-2\ell+2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} > 0$

Il problema ha due soluzioni coincidenti.

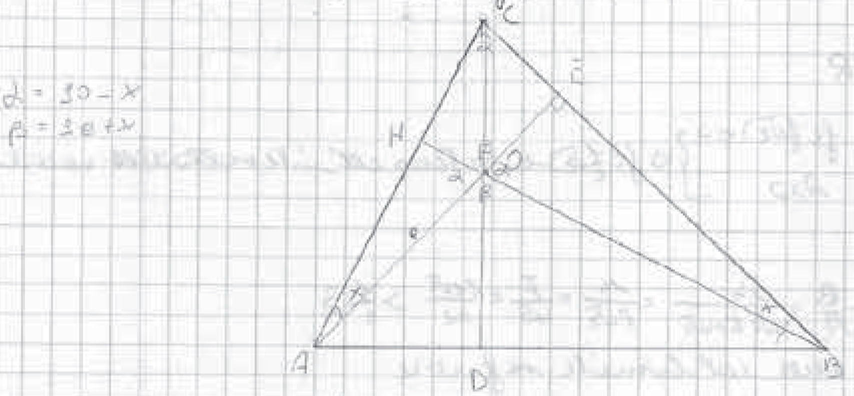
6° caso) $p>2(1+\sqrt{5})$ $\quad \Delta<0$. Il problema non ha soluzione perché le radici non sono reali-

56 Es n = 124 pag 428 Problema

Si consideri il triangolo acutangolo ABC avente il seno dell'angolo $B\hat{A}C$ uguale a $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ ed $\overline{OA} = a$, essendo O l'ortocentro del triangolo.
Determinare la misura x dell'angolo $O\hat{A}C$ in modo che si abbia

$$2OB + 3OC = 2K\,BC$$

essendo K un numero reale assegnato.



$\operatorname{sen} B\hat{A}C = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

$\overline{OA} = a$

$O\hat{A}C = x \Rightarrow 0 < x < \operatorname{arcsen} \frac{2}{3}\sqrt{2}$

$2OB + 3OC = 2K\,BC$

$\overline{AH} = a\cos x$

$\overline{OH} = a \operatorname{sen} x$

$\overline{AH} = AB \cdot \cos B\hat{A}C$

$\cos B\hat{A}C = \sqrt{1 - \frac{8}{9}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}AB = a\cos x \Rightarrow AB = 3a\cos x$

$BH = \sqrt{9a^2\cos^2 x - a^2\cos^2 x} = \sqrt{8a^2\cos^2 x} = 2a\sqrt{2}\cos x$

$\overline{OB} = 2a\sqrt{2}\cos x - a\operatorname{sen} x$

$\overline{HB} = \overline{BC}\cos x \Rightarrow 2a\sqrt{2}\cos x = \overline{BC}\cos x \Rightarrow BC = 2a\sqrt{2}$

$\overline{HC} = \sqrt{8a^2 - 8a^2\cos^2 x} = \sqrt{8a^2(1-\cos^2 x)} = \sqrt{8a^2\operatorname{sen}^2 x} = 2a\sqrt{2}\operatorname{sen} x$

$\overline{OC} = \sqrt{8a^2\operatorname{sen}^2 x + a^2\operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{9a^2\operatorname{sen}^2 x} = 3a\operatorname{sen} x$

$2(2a\sqrt{2}\cos x - a\operatorname{sen} x) + 9a\operatorname{sen} x = 4aK\sqrt{2}$

$4a\sqrt{2}\cos x - 2a\operatorname{sen} x + 9a\operatorname{sen} x - 4a\sqrt{2}K = 0$

$7\operatorname{sen} x + 4\sqrt{2}\cos x - 4\sqrt{2}K = 0$ eq lineare in seno e coseno.

pongo $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$

applico le formule parametriche:

$7\frac{2t}{1+t^2} + 4\sqrt{2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} - 4\sqrt{2}K = 0$

$14t + 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}t^2 - 4\sqrt{2}K - 4\sqrt{2}Kt^2 = 0$

$$\begin{cases} (4\sqrt{2}K + 4\sqrt{2})t^2 - 14t + 4\sqrt{2}K - 4\sqrt{2} = 0 \\ 0 \le t \le \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{cases}$$

$\frac{1}{4}\Delta = 49 - 32K^2 + 32 = 81 - 32K^2 \ge 0$ per $32K^2 - 81 \le 0$ per $-\sqrt{\frac{81}{32}} \le K \le \sqrt{\frac{81}{32}}$ per $-\frac{9}{4}\sqrt{2} \le K \le \frac{9}{4}\sqrt{2}$

per $-\frac{9\sqrt{2}}{8} \le K \le \frac{9\sqrt{2}}{8}$

$A = 4\sqrt{2}K + 4\sqrt{2} \ge 0$ per $K \ge -1$
$B = -14 < 0 \ \forall K$
$C = 4\sqrt{2}K - 4\sqrt{2} \ge 0$ per $K \ge 1$

$f\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}K + 2\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 4\sqrt{2}K - 4\sqrt{2} = 6K\sqrt{2} - 9\sqrt{2} \ge 0$ per $K \ge \frac{3}{2}$

$-\frac{B}{2A}-\frac{1}{2}\sqrt{2}>0$ per $-1<K<-\frac{1}{8}$

1° caso) $0<K<1$ $\quad \Delta>0 \Rightarrow \exists\, t_1 \neq t_2 \in R$

$\left.\begin{matrix}A>0\\B<0\\C<0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}t_1>0\\ t_2<0\end{matrix} \qquad \left.\begin{matrix}f(\frac{1}{2}\sqrt{2})<0\\A>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow f(\frac{1}{2}\sqrt{2})$ è interno all'intervallo delle radici

Il problema non ha soluzioni

2° caso) $K=1$ $\quad C=0 \Rightarrow t_1=0$ et $t_2=-\frac{B}{A}=\frac{14}{4\sqrt{2}K+4\sqrt{2}}=\frac{14}{8\sqrt{2}}=\frac{7}{4\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{8}>\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Il problema ha una sola soluzione data dal limite inferiore

3° caso) $1<K<\frac{3}{2}$ $\quad \Delta>0 \Rightarrow \exists\, t_1 \neq t_2 \in R$

$\left.\begin{matrix}A>0\\B<0\\C>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}t_1>0\\ t_2>0\end{matrix} \qquad \left.\begin{matrix}f(\frac{1}{2}\sqrt{2})<0\\A>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ "$\frac{1}{2}\sqrt{2}$" è interno all'intervallo delle radici

$-\frac{B}{2A}-\frac{1}{2}\sqrt{2}<0 \Rightarrow -\frac{B}{2A}<\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Il problema ha una sola soluzione data dalla radice più grande.

4° caso) $K=\frac{3}{2}$ $\quad f(\frac{1}{2}\sqrt{2})=0 \Rightarrow t_1=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ et $t_2=-\frac{B}{A}-\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{14}{4\sqrt{2}K+4\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{14}{6\sqrt{2}+4\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{14}{10\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{2}=\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Il problema ha due soluzioni coincidenti.

5° caso) $\frac{3}{2}<K<\frac{9}{8}\sqrt{2}$ $\quad \Delta>0 \Rightarrow \exists\, t_1 \neq t_2 \in R$

$\left.\begin{matrix}A>0\\B<0\\C>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}t_1>0\\ t_2>0\end{matrix} \qquad \left.\begin{matrix}f(\frac{1}{2}\sqrt{2})>0\\A>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ "$\frac{1}{2}\sqrt{2}$" è esterno all'intervallo delle radici

$-\frac{B}{2A}-\frac{1}{2}\sqrt{2}<0 \Rightarrow -\frac{B}{2A}<\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Il problema ha due soluzioni

6° caso) $K=\frac{9}{8}\sqrt{2}$ $\quad \Delta=0 \Rightarrow \exists\, t_1=t_2=-\frac{B}{2A}=\frac{7}{4\sqrt{2}K+4\sqrt{2}}=\frac{7}{\frac{9\sqrt{2}+8\sqrt{2}}{2}}=\frac{7}{\frac{17\sqrt{2}}{2}}=\frac{14}{17\sqrt{2}}<\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Il problema ha due soluzioni coincidenti.

7° caso) $K>\frac{9}{8}\sqrt{2}$ $\quad \Delta<0$

Il problema non ha soluzione perché le radici non sono reali

578 <u>Esercizio</u>: trova la forma trigonometrica dei punti $(\sqrt{3},1)$, $(-\sqrt{3},-1)$ e $(-2\sqrt{3},-2)$

$P(\sqrt{3},1)$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$ raggio vettore

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{2}\sqrt{3} < \begin{array}{l} 30^\circ \\ 330^\circ \end{array} \\ \operatorname{sen}\varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{2} < \begin{array}{l} 30^\circ \\ 150^\circ \end{array} \end{array}\right\} \varphi = 30^\circ \text{ anomalia}$$

$(\varphi = 30^\circ + 2k\,180^\circ)$
per $k=0$ si ha l'anomalia principale.

$(\sqrt{3},1) = 2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$

$P(-\sqrt{3},-1)$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3+1} = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = \frac{y}{\rho} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} < \begin{array}{l} 150^\circ \\ 210^\circ \end{array} \\ \operatorname{sen}\varphi = \frac{x}{\rho} = -\frac{1}{2} < \begin{array}{l} 210^\circ \\ 330^\circ \end{array} \end{array}\right\} \varphi = 210^\circ$$

$(-\sqrt{3},-1) = 2(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ)$

$P(-2\sqrt{3},-2)$

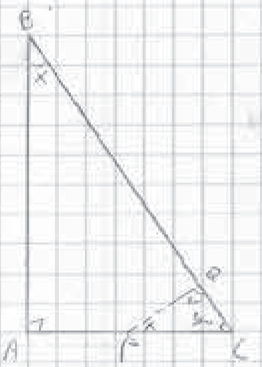
$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = -\frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} < \begin{array}{l} 150^\circ \\ 210^\circ \end{array} \\ \operatorname{sen}\varphi = -\frac{1}{2} < \begin{array}{l} 210^\circ \\ 330^\circ \end{array} \end{array}\right\} \varphi = 210^\circ$$

$(-2\sqrt{3},-2) = 4(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ)$

Es n: 131 pag 430 Problema

Si consideri il triangolo ABC rettangolo in A, avente l'ipotenusa che misura $2a$: sia P il punto medio di AC e Q la sua proiezione ortogonale su BC. Determinare l'angolo ABC in modo che si abbia:



$$\overline{PQ}+\overline{QC}=k\cdot\overline{BQ}$$

$\overline{BC}=2a$

$\overline{AP}=\overline{PC}$

$A\hat{B}C=x \Rightarrow 0°<x<90°$

$\overline{AC}=2a\,\text{sen}\,x$

$\overline{PC}=a\,\text{sen}\,x$

$\overline{QC}=a\,\text{sen}^2x$

$\overline{PQ}=a\,\text{sen}\,x\cos x$

$\overline{BQ}=2a-a\,\text{sen}^2x=a(2-\text{sen}^2x)$

$a\,\text{sen}\,x\cos x+a\,\text{sen}^2x=ka(2-\text{sen}^2x)$

$\text{sen}\,x\cos x+\text{sen}^2x-2k+k\,\text{sen}^2x=0$ eq. di 2° grado in seno coseno non omogenea ma che si può rendere tale.

$k\,\text{sen}^2x+\text{sen}^2x+\text{sen}\,x\cos x-2k(\text{sen}^2x+\cos^2x)=0$

$(k-1)\,\text{sen}^2x-\text{sen}\,x\cos x+2k\cos^2x=0$

se è $k=1$ allora non può esistere un angolo che nello stesso tempo annulla il coseno e risolve l'equazione è allora dividendo ambo i membri dell'equazione ne ottengo una equivalente:

$$\begin{cases}(k-1)\,\text{tg}^2x-\text{tg}\,x+2k=0\\ \text{tg}\,x>0\end{cases}$$

$\Delta=1-8k(k-1)=-8k^2+8k+1\geq0$ per $8k^2-8k-1\leq0$

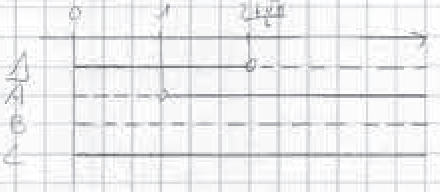
$$k=\frac{4\pm\sqrt{16+8}}{8}=\frac{4\pm\sqrt{24}}{8}=\frac{4\pm2\sqrt{6}}{8}=\frac{2\pm\sqrt{6}}{4}<\begin{matrix}\frac{2-\sqrt{6}}{4}\\ \frac{2+\sqrt{6}}{4}\end{matrix}$$

$\Delta\geq0$ per $0<k<\frac{2+\sqrt{6}}{4}$

$A=k-1\geq0$ per $k\geq1$

$B=-1<0\ \forall k$

$C=2k>0$ per $k>0$



1° caso) $0<K<1$ $\quad \Delta>0 \Rightarrow \exists\ tg_1 x \neq tg_2 x \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} A<0 \\ B<0 \\ C>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} tg_1 x<0 \\ tg_2 x>0 \end{array}$$

Il problema ha una sola soluzione

2° caso) $K=1$ in questo caso dobbiamo lavorare sull'equazione di partenza poichè non è più equivalente a quella in tangente. Essa diventa:

$$-\operatorname{sen} x \cos x + 2\cos^2 x = 0$$

$$\cos x\,(2\cos x - \operatorname{sen} x) = 0$$

per la legge d'annullamento del prodotto si ha:

$\cos x = 0 \Rightarrow x = 90°$ no

$2\cos x - \operatorname{sen} x = 0$

poichè $\cos x = 0$ non è soluzione dell'eq. allora possiamo dividere per $\cos x$:

$$-tg\,x + 2 = 0$$

$$tg\,x = 2$$

Il problema ha una sola soluzione

3° caso) $1<K<\frac{2+\sqrt{5}}{4}$ $\quad \Delta>0 \Rightarrow \exists\ tg_1 x \neq tg_2 x \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} A>0 \\ B<0 \\ C>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} tg_1 x>0 \\ tg_2 x>0 \end{array}$$

Il problema ha due soluzioni

4° caso) $K=\frac{2+\sqrt{5}}{4}$ $\quad \Delta=0 \Rightarrow \exists\ tg_1 x = tg_2 x = -\frac{B}{2A} = \frac{1}{2K-2} = \frac{1}{\frac{2+\sqrt{5}}{2}-2} = \frac{1}{\frac{2+\sqrt{5}-4}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-2} = \frac{2\sqrt{5}+4}{2} = \frac{\sqrt{5}+2}{2} > 0$

Il problema ha due soluzioni coincidenti

5° caso) $K>\frac{2+\sqrt{5}}{4}$ $\quad \Delta<0$

Il problema non ha soluzioni perchè le radici non sono reali

Esercizio: trovare le radici cubiche del numero complesso (8,0).

$(8,0)^{\frac{1}{3}} = [8(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)]^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right)\right]$

$k=0 \Rightarrow 2(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 2(1+0i) = 2+0i = (2,0)$

$k=1 \Rightarrow 2\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \operatorname{sen} \frac{2}{3}\pi\right) = 2(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) = 2\left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -1 + \frac{2}{2}\sqrt{3} i = \left(-1, \frac{2}{2}\sqrt{3}\right)$

$k=2 \Rightarrow 2(\cos 240 + i \operatorname{sen} 240) = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} i\right) = -1 - \frac{2}{2}\sqrt{3} = \left(-1, -\frac{2}{2}\sqrt{3}\right)$

Esercizio: trovare le radici cubiche di (1,0) e fare il grafico delle ~~punti~~ coppie trovate

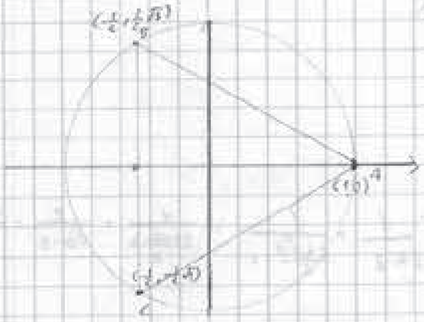
$(1,0)^{\frac{1}{3}} = [1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0°)]^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right)\right]$ con $k=0,1,2$

$k=0 \Rightarrow 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 1(1+0i) = 1+0i = (1,0)$

$k=1 \Rightarrow 1(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) = 1\left(-\frac{1}{2} + i \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -\frac{1}{2} + i \frac{1}{2}\sqrt{3} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

$k=2 \Rightarrow 1(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°) = 1\left(-\frac{1}{2} + i \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} i = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$



Esercizio: trovare le radici seste di (1,0) e fare il grafico delle coppie trovate.

$(1,0)^{\frac{1}{6}} = [1(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°)]^{\frac{1}{6}}$

$\sqrt[6]{1}\left[\cos\left(\frac{0+2k\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0+2k\pi}{6}\right)\right]$

$k=0 \Rightarrow 1(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°) = 1(1 + i \cdot 0) = 1 + i0 = (1;0)$

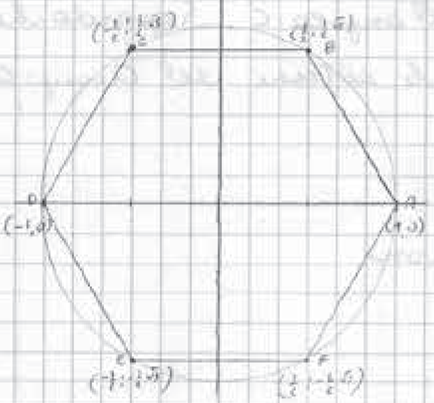
$k=1 \Rightarrow 1(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = 1\left(\frac{1}{2} + i \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2} + i \frac{1}{2}\sqrt{3} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

$k=2 \Rightarrow 1(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) = 1\left(-\frac{1}{2} + i \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -\frac{1}{2} + i \frac{1}{2}\sqrt{3} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

$k=3 \Rightarrow 1(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°) = 1(-1 + i 0) = -1 + i0 = (-1;0)$

$k=4 \Rightarrow 1(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°) = 1\left(-\frac{1}{2} + i \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -\frac{1}{2} + i \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

$k=5 \Rightarrow 1(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°) = 1\left(\frac{1}{2} + i \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2} + i \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$



Esercizio:

Trovare le tre radici terze del numero complesso (9,0).

$(9,0)^{\frac{1}{3}} = [9(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°)]^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[3]{9}\left(\cos\frac{0°+2k\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{0°+2k\pi}{3}\right)$ con $k = 0, 1, 2$.

$k=0 \Rightarrow \sqrt[3]{9}(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°) = \sqrt[3]{9}(1 + i\cdot 0) = \sqrt[3]{9} + i\cdot 0 = (\sqrt[3]{9}; 0)$

$k=1 \Rightarrow \sqrt[3]{9}(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) = \sqrt[3]{9}\left(-\frac{1}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{9} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt[3]{9} = \left(-\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}; \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}\right)$

$k=2 \Rightarrow \sqrt[3]{9}(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°) = \sqrt[3]{9}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i\right) = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{9} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt[3]{9}\, i = \left(-\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}; -\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}\right)$

Esercizio: trovare le tre radici terze del numero complesso (-27,0):

$(-27,0)^{\frac{1}{3}} = [27(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°)]^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[3]{27}\left(\cos\frac{180°+2k\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{180°+2k\pi}{3}\right)$ con $k = 0, 1, 2$.

$k=0 \Rightarrow +3(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = +3\left(\frac{1}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = +\frac{3}{2} + i\cdot\frac{3}{2}\sqrt{3} = \left(+\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$

$k=1 \Rightarrow 3(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°) = 3(-1 + i\cdot 0) = -3 + i\cdot 0 = (-3; 0)$

$k=2 \Rightarrow 3(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°) = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\, i\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}\, i = \left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$

Esercizio: trovare le tre radici terze del numero complesso (0,1):

$(0,1)^{\frac{1}{3}} = [1(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)]^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{90°+2k\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{90°+2k\pi}{3}\right)$ con $k = 0, 1, 2$.

$k=0 \Rightarrow 1(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3} + i\cdot\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}; \frac{1}{2}\right)$

$k=1 \Rightarrow 1(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + i\cdot\frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}; \frac{1}{2}\right)$

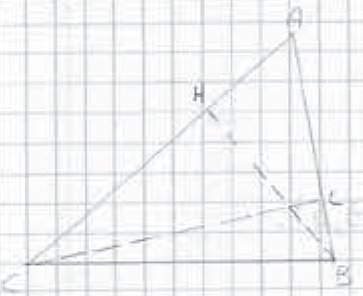
$k=2 \Rightarrow 1(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°) = 0 + i\cdot -1 = (0; -1)$

Es n: 142 pag 432 Problema:

In un triangolo ABC, l'angolo $\hat{B}$ è doppio dell'angolo $\hat{C}$. Sapendo che è $BC = a$, e che, dette BH e CL rispettivamente le altezze del triangolo uscenti dai vertici B e C, si ha:

$$\overline{BH}^2 + \overline{CL}^2 = ma^2$$

Calcolare il valore x dell'angolo $A\hat{B}C$. Discussione



$A\hat{B}C = 2\, A\hat{C}B$

$\overline{BC} = a$

Pongo $A\hat{B}C = x \Rightarrow 0° < x < 120°$

$\overline{BH} = a \operatorname{sen}\frac{x}{2}$

$\overline{CL} = a \operatorname{sen} x = 2a \operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$a^2 \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + 4a^2 \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = ma^2$

$\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + 4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\left(1 - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right) - m = 0$

$\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + 4\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} - 4\operatorname{sen}^4\frac{x}{2} - m = 0$

$4\operatorname{sen}^4\frac{x}{2} - 5\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + m = 0$

pongo $\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = t$

$$\begin{cases} 4t^2 - 5t + m = 0 \\ 0 < t < \frac{3}{4} \end{cases}$$

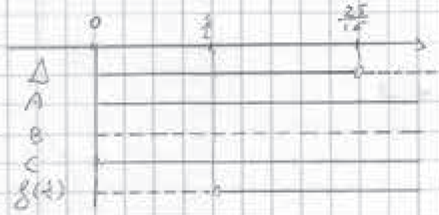
$\Delta = 25 - 16m \geq 0$ per $m \leq \frac{25}{16}$

$A = 4 > 0 \;\forall m$

$B = -5 < 0 \;\forall m$

$C = m \geq 0$ per $m \geq 0$

$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{4} - \frac{15}{4} + m \geq 0$ per $m \geq \frac{3}{2}$



1° caso) $m = 0$ $C = 0 \Rightarrow t_1 = 0$ et $t_2 = -\frac{B}{A} = \frac{5}{4}$

Il problema non ha soluzioni perché le radici non soddisfano le limitazioni.

2° caso) $0 < m < \frac{3}{2}$ $\Delta > 0 \Rightarrow \exists\, t_1 \neq t_2 \in \mathbb{R}$

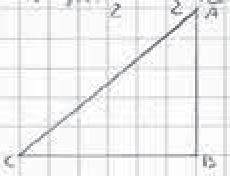
$\left.\begin{matrix} A>0 \\ B<0 \\ C>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} t_1>0 \\ t_2>0 \end{matrix}$ $\left.\begin{matrix} f(\frac{3}{4})<0 \\ A>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ "$\frac{3}{4}$" è interno all'intervallo delle radici

Il problema ha una sola soluzione.

3° caso) $m=\frac{3}{2}$ $f(\frac{3}{4})=0 \Rightarrow t_1=\frac{3}{4}$ et $t_2=-\frac{B}{A}-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$

Il problema ha una soluzione. La figura si realizza così!

per $t=\frac{1}{2} \Rightarrow sen^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow sen\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow \frac{x}{2}=45^\circ \Rightarrow x=90^\circ$



4° caso) $\frac{3}{2}<m<\frac{25}{16}$ $\Delta>0 \Rightarrow \exists\, t_1 \neq t_2 \in R$

$\left.\begin{matrix} A>0 \\ B<0 \\ C>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} t_1>0 \\ t_2>0 \end{matrix}$ $\left.\begin{matrix} f(\frac{3}{4})>0 \\ A>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ "$\frac{3}{4}$" è esterno all'intervallo delle radici.

Il problema ha due soluzioni

5° caso) $m=\frac{25}{16}$ $\Delta=0 \Rightarrow \exists\, t_1=t_2=-\frac{B}{2A}=\frac{5}{8}$

Il problema ha due soluzioni coincidenti.

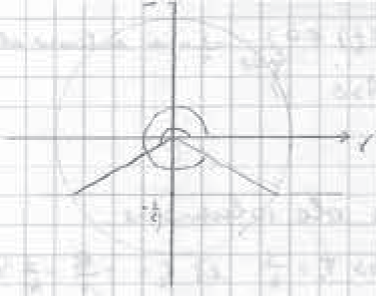
6° caso) $m>\frac{25}{16}$ $\Delta<0$

Il problema non ha soluzioni perchè le radici non sono reali

Es n=1 pag 387

$\operatorname{sen} X < -\frac{1}{2}$

$210° < x < 330°$



Es n: 2 pag 387

$\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$

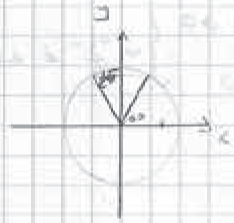
$60° < x < 90°$

$240° < x < 270°$

Es n: 3 pag 387

$\operatorname{sen} x \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$

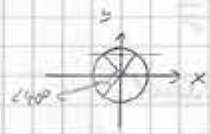
$60° \leq x \leq 120°$



Es n: 4 pag 387

$\operatorname{sen} x < \frac{1}{2}\sqrt{3}$

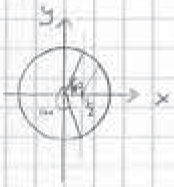
$120° < x < 60°$



Es n: 11 pag 388

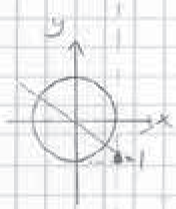
$\cos X < \frac{1}{2}$

$60 < x < 300°$



Es n: 12 / pag 388

$\operatorname{tg} x > -1$

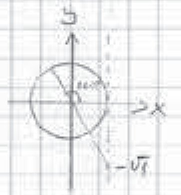


Es n: 13 pag 388

$\operatorname{tg} x \leq -\sqrt{3}$

$30° < x \leq 120°$

$270° < x \leq 300°$

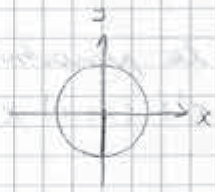


61

Es n. 40 pag 331

$\sin^2 x - 3\sin x - 4 < 0$

$\sin x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{cases} -1 \\ 4 \text{ no} \end{cases}$



Es n. 42 pag 331

$\cos 2x + \cos x < 0$

$\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x < 0$

$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + \cos x < 0$

$2\cos^2 x + \cos x - 1 < 0$

calcolo gli zeri del 1° membro della disequazione *

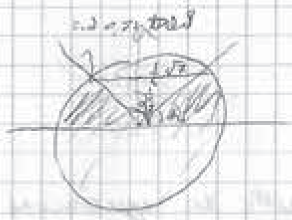
$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$

i punti sull'arco AB hanno il cos compreso -1 e $\frac{1}{2}$

$-1 < \cos x < \frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi \quad x \neq \pi$

$\sin x < \frac{1}{4}\sqrt{7}$



$\alpha \geq \frac{\pi}{6}$

$0 < x < \alpha_1$ et $\alpha_2 < x < 2\pi$

$\frac{\pi}{6} < \alpha_1 < \frac{\pi}{4}$

$41{,}3^\circ : x = 180^\circ : \pi$

$x = \frac{41{,}3\,\pi}{180^\circ} = 0{,}72$ rad

$0{,}72 : \pi = 0{,}23 = \frac{23}{100}\pi$

Es n: 172 pag 656

Determinare m in modo che la parabola di equazione:

$$y = x^2 + (m-1)x - 6m$$

1) risulti tangente all'asse x.

$$\begin{cases} y = x^2 + (m-1)x - 6m \\ y = 0 \end{cases}$$

$x^2 + (m-1)x - 6m = 0$

$\Delta = (m-1)^2 + 24m$

$(m-1)^2 + 24m = 0$

$m^2 + 22m + 1 = 0$

$m = -11 \pm \sqrt{121-1} = -11 \pm 2\sqrt{3}$

2) abbia per asse la retta $x = 4$

$x = -\frac{B}{2A}$ eq. dell'asse della parabola

$4 = \frac{1-m}{2}$

$m = -7$

3) abbia per tangente nel vertice la retta di equazione $y = 4$

$$\begin{cases} y = x^2 + (m-1)x - 6m \\ y = 4 \end{cases}$$

$x^2 + (m-1) - 6m - 4 = 0$

$\Delta = (m-1)^2 + 24m + 16$

$(m-1)^2 + 24m + 16 = 0$

$m^2 + 22m + 17 = 0$

$m = -11 \pm \sqrt{121-17} = -11 \pm 2\sqrt{26}$

4) abbia per direttrice la retta $y = 5$

$y = -\frac{1+\Delta}{4A}$ eq. della direttrice

$5 = -\frac{1 + m^2 - 2m + 1 + 24m}{4}$

$-20 = m^2 + 22m + 2$

$m^2 + 22m + 22 = 0$

$m = -11 \pm \sqrt{121-22} = -11 \pm 3\sqrt{11}$

02

5) ricerca tangente alla retta $y = 3x+1$

$$\begin{cases} y = x^2 + (m-1)x - 6m \\ y = 3x+1 \end{cases}$$

$3x+1 = x^2 + (m-1)x - 6m$

$x^2 + (m-4)x - 6m - 1 = 0$

$\Delta = (m-4)^2 + 24m + 4$

$(m-4)^2 + 24m + 4 = 0$

$m^2 + 16m + 20 = 0$

$m = -8 \pm \sqrt{64-20} = -8 \pm 2\sqrt{11}$

Es n: 178 / pag 658

1) Scrivere le equazioni delle tangenti alla parabola $y = x^2 - 2x - 24$ nei punti in cui questa incontra gli assi coordinati.

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 24 \\ y = 0 \end{cases}$$

$x^2 - 2x - 24 = 0$

$x = 1 \pm \sqrt{1+24} = 1 \pm 5 < \begin{matrix} -4 \\ 6 \end{matrix}$

$A(-4, 0)$; $B(6, 0)$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 24 \\ x = 0 \end{cases}$$

$y = -24$

$C(0, -24)$

$$\begin{cases} y = mx + 4m \\ y = x^2 - 2x - 24 \end{cases}$$ condizione per la eq. fascio per A

$x^2 - 2x - 24 = mx + 4m$

$x^2 - (m+2)x - 24 - 4m$

$\Delta = (m+2)^2 + 96 + 16m$

$(m+2)^2 + 96 + 16m = 0$ condizione di tangenza

$m^2 + 20m + 100 = 0$

$m = -10 \pm \sqrt{100-100} = -10$

$y = -10x - 40$ eq. della tangente alla parabola nel punto A

$$\begin{cases} y = mx - 6m \\ y = x^2 - 2x - 24 \end{cases}$$ condizione per la eq. fascio per B

$x^2 - 2x - 24 = mx - 6m$

$x^2 - (m+2)x - 24 + 6m = 0$

$\Delta = (m+2)^2 + 96 - 24m =$

$(m+2)^2 + 96 - 24m = 0$ condizione di tangenza

$m^2 - 20m + 100 = 0$

$m = +10 \pm \sqrt{100-100} = 10$

$y = 10x - 60$ eq. della tangente alla parabola nel punto B.

$$\begin{cases} y = mx - 24 \\ y = x^2 - 2x - 24 \end{cases}$$ condizione sulla tg pass. per C.

$x^2 - 2x - \cancel{24} = mx - \cancel{24}$

$x^2 - (m+2)x = 0$

$\Delta = (m+2)^2$

$(m+2)^2 = 0$

$m = -2$

$y = -2x - 24$ eq. della tangente in C.

2) Scrivere l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo T individuato dalle tre tangenti trovate e verificare che la circonferenza passa per il fuoco della parabola.

$$\begin{cases} y = -10x - 40 \\ y = 10x - 60 \end{cases}$$

$10x - 60 = -10x - 40$

$20x = 20 \Rightarrow x = 1$

$y = -50$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -10x - 40 \\ y = -2x - 24 \end{cases}$$

$-2x - 24 = -10x - 40$

$8x = -16 \Rightarrow x = -2$

$y = 20$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 10x - 60 \\ y = -2x - 24 \end{cases}$$

$-2x - 24 = 10x - 60$

$12x = 36 \Rightarrow x = 3$

$y = -30$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -30 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$$\begin{cases} 1 + 2500 + a - 50b + c = 0 \\ 4 + 400 - 2a + 20b + c = 0 \\ 9 + 900 + 3a - 30b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - 50b + c + 2501 = 0 \\ -2a + 20b + c + 404 = 0 \\ +3a - 30b + c + 909 = 0 \end{cases} \begin{array}{|cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{array}$$

Risolvere le seguenti disequazioni goniometriche

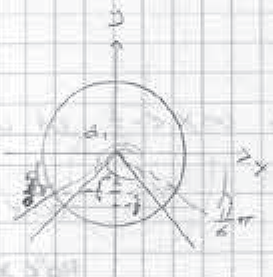
(1)

$\sin x > -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

~~$45° < x < 135°$~~

$0 < x < 225°$ et $315° < x < 360°$

$0 < x < \frac{5}{4}\pi$ et $\frac{7}{4}\pi < x < 2\pi$



(2)

$\sin x > -\frac{5}{8}$ $(-0{,}625)$

$\alpha_1 > \frac{\pi}{6}$ $\quad \alpha_2 < \frac{11}{6}\pi$

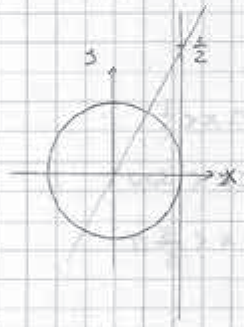
$0 < x < \alpha_1$ et $\alpha_2 < x < 2\pi$

dove ($\alpha_1 > \frac{7}{6}\pi$ et $\alpha_2 < \frac{11}{6}$) $\alpha_1 > \frac{7}{6}\pi$ e α_2 è segue α_1 ...

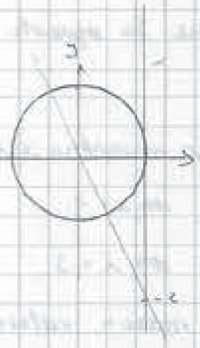
α_1 è ... $\frac{7}{6}\pi$ e α_2 è ... $\frac{11}{6}\pi$ ...

3) $\sin x < 3$ per ogni valore di x

4) $\sin x < \frac{1}{4}\sqrt{10}$ $(0{,}7906)$



5) $\operatorname{tg} x > \frac{3}{2}$



6) $\operatorname{tg} x > -2$

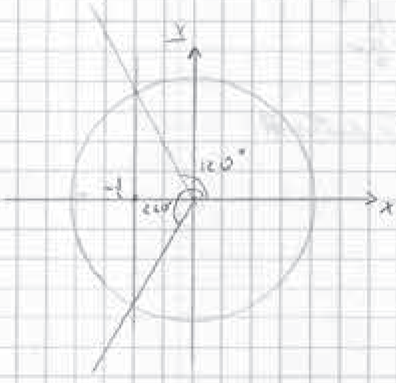
Es n: 36 pag 380 Risolvere la seguente disequazione goniometrica

$4\cos^2 x - 1 > 0$

calcolo gli zeri del primo membro della disequazione

$\cos x = \pm \frac{1}{2}$

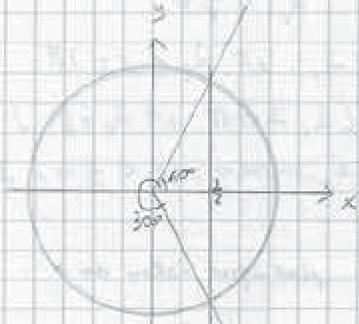
$4\cos^2 x - 1 > 0$ per $\cos x < -\frac{1}{2}$ et $\cos x > \frac{1}{2}$



$\cos x < -\frac{1}{2}$

$120° < x < 240°$

$\frac{2}{3}\pi < x < \frac{4}{3}\pi$



$\cos x > \frac{1}{2}$

$0° < x < 60°$

$0° < x < \frac{\pi}{3}$

$300° < x < 360°$

$\frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$

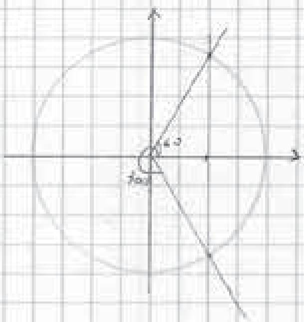
Es n: 33 pag 380 Risolvere la seguente disequazione goniometrica

$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 > 0$

calcolo gli zeri del primo membro della disequazione:

$\cos x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \quad \frac{3 \pm 1}{4} < \begin{matrix} \cos_1 x = \frac{1}{2} \\ \cos_2 x = 1 \end{matrix}$

$\cos x < \frac{1}{2}$ et $\cos x > 1$ imp.



$\cos x < \frac{1}{2}$

$60° < x < 300°$

$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$

Es n: 41 pag 381 Risolvere la seguente disequazione goniometrica

$\sin^2 x - 4\sin x + 3 < 0$

calcolo gli zeri del primo membro della disequazione.

$\text{sen } x = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 < \begin{matrix} \text{sen}_1 x = 1 \\ \text{sen}_2 x = 3 \end{matrix}$

la disequazione non è risolta per nessun valore di x

Es n: 77 pag 331

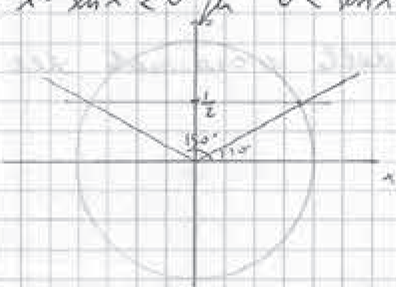
$2\sin^2 x - \sin x < 0$

calcolo gli zeri del primo membro della disequazione:

$\sin x = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$2\sin^2 x - \sin x < 0$ per $0 < \sin x < \frac{1}{2}$



$2\sin^2 x - \sin x < 0$ per:

$0° < x < 30°$ et $150° < x < 180°$

$0 < x < \frac{\pi}{6}$ et $\frac{5}{6}\pi < x < \pi$

Es n: 46 pag 331

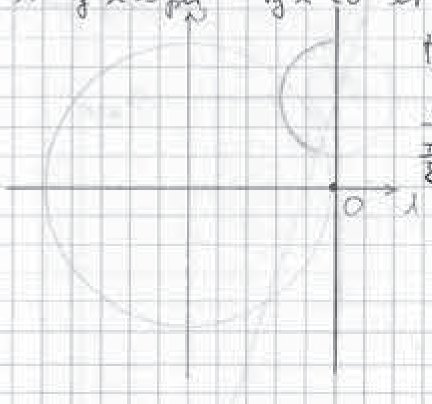
$tg^2 x - tg x > 0$

calcolo gli zeri del primo membro della disequazione:

$tg\, x = 0$

$tg\, x = 1$

$tg^2 x - tg\, x > 0$ per $tg\, x < 0$ et $tg\, x > 1$



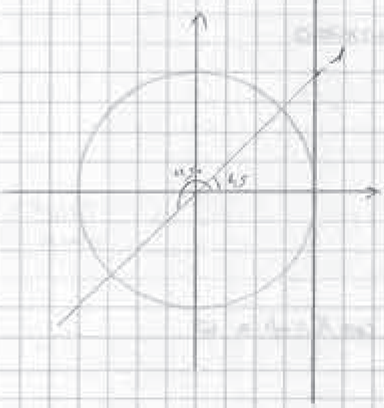
$tg\, x < 0$

$90° < x < 180°$

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$

$270° < x < 360°$

$\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$



$tg\, x > 1$

$45° < x < 90°$

$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$

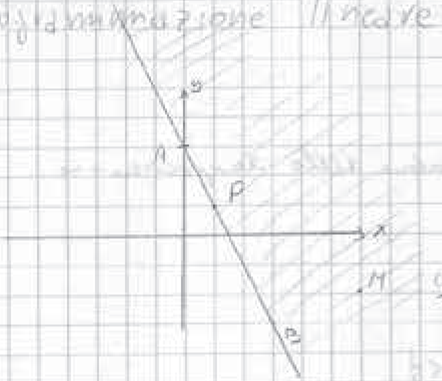
$225° < x < 270°$

$\frac{5}{4}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$

Esercizio

$2x + y - 3 = 0$

x	y
0	3
3	-3



I punti del semipiano che contiene M rendono l'eq. positiva, quelli dell'altro semipiano la rendono nega (<0)

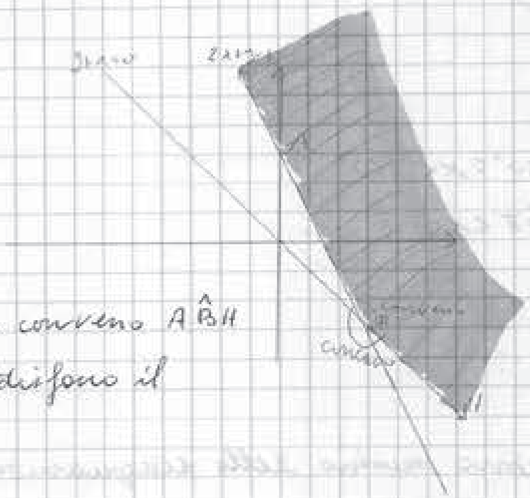
$2x + y - 3 > 0$

Le soluzioni di questa disequazione sono date dalle coordinate dei punti del semipiano individuato dalla retta

$$2x + y - 3 = 0$$

che non contiene l'origine

$$\begin{cases} y + x < 0 \\ y + 2x - 3 > 0 \end{cases}$$



$y + x = 0$

Tutti i punti dell'angolo convesso $A\hat{B}H$ con le loro coordinate soddisfano il sistema.

Esercizio

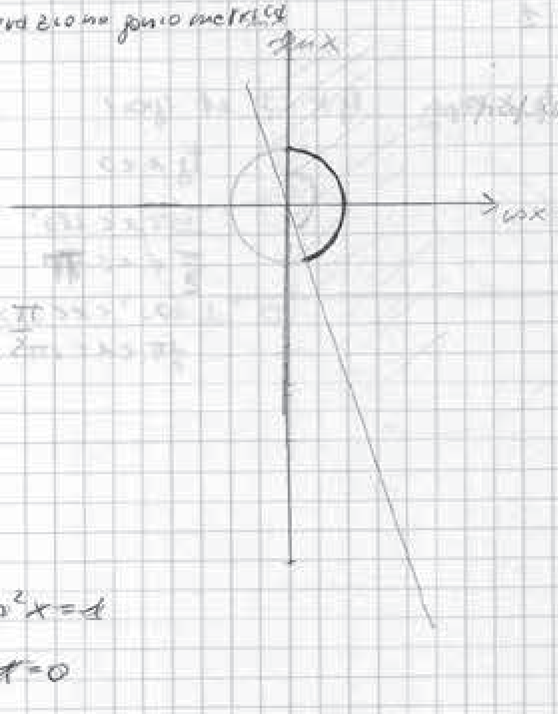
Risolvere la seguente disequazione goniometrica

$\operatorname{sen} x + (2+\sqrt{3}) \cos x - 1 > 0$

$\operatorname{sen} x + (2+\sqrt{3}) \cos x - 1 = 0$

$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
1	0
$-3-2\sqrt{3}$	2

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$



$\left.\begin{array}{l}\cos x = 0 \\ \operatorname{sen} x = 1\end{array}\right\} x = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + (2+\sqrt{3}) \cos x - 1 = 0 \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$\operatorname{sen} x = 1 - (2+\sqrt{3}) \cos x$

$1 - 2(2+\sqrt{3}) \cos x + (7 + 4\sqrt{3}) \cos^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cancel{1} - 4\cos x - 2\sqrt{3} \cos x + 8 \cos^2 x + 4\sqrt{3} \cos^2 x - \cancel{1} = 0$

$(8 + 4\sqrt{3}) \cos^2 x - (4 + 2\sqrt{3}) \cos x = 0$

$\cos x = 0$

$$\left.\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} & < \begin{array}{l} 60° \left(\frac{1}{3}\pi\right) \\ 300° \left(\frac{5}{3}\pi\right) \end{array} \\ \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}\sqrt{3} & < \begin{array}{l} -60° \left(-\frac{1}{3}\pi\right) \\ 300° \left(\frac{5}{3}\pi\right) \end{array} \end{cases}\right\} x = 300° = \frac{5}{3}\pi$$

$0 < x < 90°$

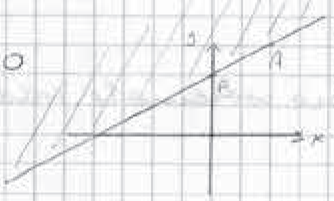
$300 < x < 360°$

Esercizio   risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} x-2y+4<0 \\ 5x+y-1>0 \end{cases}$$

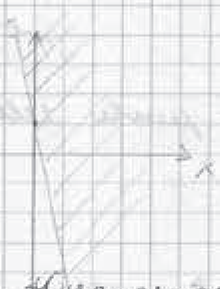
$x-2y+4=0$

x	y
0	2
2	3



$5x+y-1=0$

x	y
0	1
1	-4



Le soluzioni della disequazione

$$x-2y+4<0$$

sono date dalle coordinate dei punti del semipiano individuato dalla retta

$$x-2y+4=0$$

che non contiene l'origine

Le soluzioni della disequazione

$$5x+y-1>0$$

sono date dalle coordinate dei punti del piano individuato dalla retta

$$5x+y-1=0$$

che non contiene l'origine.

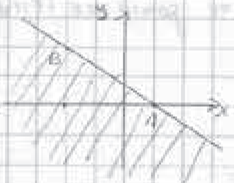
Tutti i punti dell'angolo convesso $A\hat{C}D$ con le loro coordinate soddisfano il sistema.

Esercizio   risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x+3y-2<0 \\ x-3y>0 \end{cases}$$

$2x+3y-2=0$

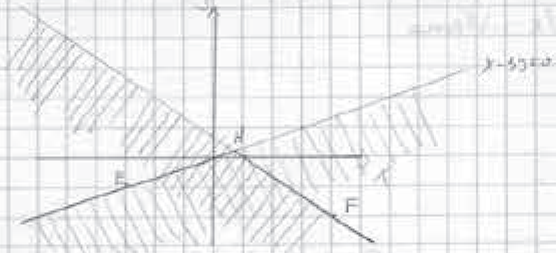
x	y
1	0
-2	2



Le soluzioni della disequazione $2x+3y-2<0$ sono date dalle coordinate dei punti del semipiano individuato dalla retta $2x+3y-2=0$ che contiene l'origine.

$x-3y=0$

Le soluzioni della disequazione $x-3y>0$ sono date dalle coordinate dei punti del semipiano individuato dalla retta $x-3y=0$ che contiene il punto D



Tutti i punti dell'angolo convesso $E\hat{H}F$ con le loro coordinate soddisfano il sistema.

Es n: 48 pag 331 Risolvere la seguente disequazione goniometrica

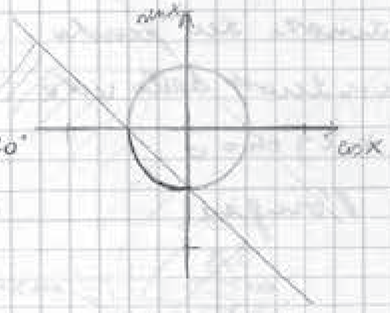
$\operatorname{sen} x + \cos x < -1$

$\operatorname{sen} x + \cos x + 1 < 0$

$\operatorname{sen} x + \cos x + 1 = 0$

$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
0	-1
-1	0

$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} x = -1 < \begin{smallmatrix} 270° \\ -90° \end{smallmatrix} \\ \cos x = 0 < \begin{smallmatrix} 270° \\ 90° \end{smallmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow x = 270°$



$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -1 - \cos x \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$\cancel{1} + 2\cos x + \cos^2 x + \cos^2 x = \cancel{1}$

$2\cos^2 x + 2\cos x = 0$

$\cos x = 0$

$$\left.\begin{cases} \cos x = -1 < \begin{smallmatrix} 180° \\ 180° \end{smallmatrix} \\ \operatorname{sen} x = 0 < \begin{smallmatrix} 0° \\ 180° \end{smallmatrix} \end{cases}\right\} \Rightarrow x = 180°$$

$180° < x < 270°$

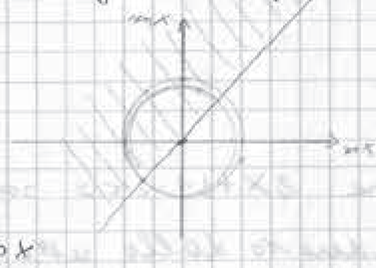
$\pi < x < \frac{3}{2}\pi$

Es n: 50 pag 331 risolvere la seguente disequazione goniometrica

$\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x > 0$

$\operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x = 0$

$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
0	0
1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$



$$\begin{cases} \operatorname{sen} x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \sqrt{3}\cos x \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$3\cos^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$

$4\cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} < \begin{smallmatrix} 60° \\ 300° \end{smallmatrix} \\ \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}\sqrt{3} < \begin{smallmatrix} 60° \\ 120° \end{smallmatrix} \end{cases}\right\} \Rightarrow x = 60°$$

$$\left.\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} < \begin{smallmatrix} 120° \\ 240° \end{smallmatrix} \\ \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}\sqrt{3} < \begin{smallmatrix} 300° \\ 240° \end{smallmatrix} \end{cases}\right\} \Rightarrow x = 240°$$

$60° < x < 240°$

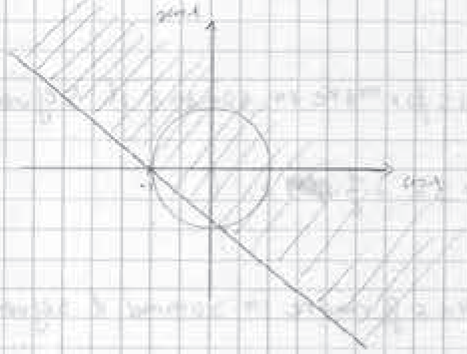
$\frac{\pi}{3} < x < \frac{4}{3}\pi$

Es. n° 47 pag 331 Risolvere la seguente disequazione goniometrica

$3\sin x + \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3} > 0$

$3\sin x + \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3} = 0$

$\sin x$	$\cos x$
0	-1
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



$\begin{cases} \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ 3\sin x + \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3} = 0 \end{cases}$

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}}{3}$

$\cos^2 x + \frac{3\cos^2 x + 6\cos x + 3}{9} = 1$

$3\cos^2 x + \cos^2 x + 2\cos x + 1 - 3 = 0$

$4\cos^2 x + 2\cos x - 2 = 0$

$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \left< \begin{array}{l} \cos_1 x = -1 \\ \cos_2 x = \frac{1}{2} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} \cos x = -1 < \begin{array}{l} x = 180° \\ x = 180° \end{array} \\ \sin x = 0 < \begin{array}{l} 0° \\ 180° \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow x = 180°$

$\left\{ \begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} < \begin{array}{l} 60° \\ 300° \end{array} \\ \sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{3} < \begin{array}{l} 300° \\ -60° \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow x = 300°$

$0° < x < 180°$ et $300° < x < 360°$

$0 < x < \pi$ et $\frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$

[redacted]

Es n: 146 pag 345 Trasformare in somma il seguente prodotto

$$\operatorname{sen} 4\alpha \operatorname{sen} 5\alpha = \frac{1}{2}\cos(-\alpha) - \frac{1}{2}\cos 9\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\cos 9\alpha$$

Es n: 147 pag 345 Trasformare in somma il seguente prodotto

$$\operatorname{sen} 3\alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 5\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha$$

Es n: 148 pag 345 Trasformare in somma il seguente prodotto

$$\cos 6\alpha \cos\alpha = \frac{1}{2}\cos 7\alpha + \frac{1}{2}\cos 5\alpha$$

Es n: 149 pag 345 Trasformare in somma il seguente prodotto

$$\operatorname{sen}\alpha \cos 7\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 8\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(-6\alpha)$$

Es n: 150 pag 345 Trasformare in somma il seguente prodotto

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \operatorname{sen}\frac{5}{2}\alpha = \frac{1}{2}\cos(-2\alpha) - \frac{1}{2}\cos 3\alpha = \frac{1}{2}\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\cos 3\alpha$$

Es n: 151 pag 345 Trasformare in somma il seguente prodotto

$$\cos\frac{\alpha}{4}\cos\alpha = \frac{1}{2}\cos\frac{5}{4}\alpha + \frac{1}{2}\cos\left(-\frac{3}{4}\alpha\right) = \frac{1}{2}\cos\frac{5}{4}\alpha + \frac{1}{2}\cos\frac{3}{4}\alpha$$

Es n: 152 pag 345 Semplificare la seguente espressione goniometrica

$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta - \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)} - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) - \cancel{\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)} = -\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

Es n: 153 pag 345 Semplificare la seguente espressione goniometrica:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \frac{\cancel{2}\cancel{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cancel{2}\cancel{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

57 Es n: 33 pag 330 Risolvere la seg. disequazione

$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 > 0$

calcolo gli zeri del primo membro della disequazione:

$\cos x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} <$ $\cos_1 x = \frac{1}{2}$, $\cos_2 x = 1$

$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 > 0$ per $\cos x < \frac{1}{2}$

$60° < x < 300°$

$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$

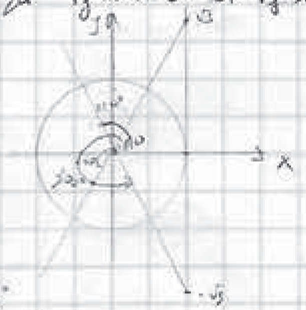
Es n: 38 pag 330 risolvere la seg. disequazione

$tg^2 x - 3 > 0$

calcolo gli zeri del primo membro della disequazione:

$tg_1 x = \sqrt{3}$
$tg_2 x = -\sqrt{3}$

$tg^2 x - 3 > 0$ per $tg\, x < -\sqrt{3}$ et $tg\, x > \sqrt{3}$



$60° < x < 90°$
$\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$

$240° < x < 270°$
$\frac{4}{3}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$

$270° < x < 300°$
$\frac{3}{2}\pi < x < \frac{5}{3}\pi$

$90° < x < 120°$
$\frac{\pi}{2} < x < \frac{2}{3}\pi$

$60° < x < 90°$
$240 < x < 270°$
$270° < x < 300°$
$90° < x < 120°$

$60° < x < 120°$ $\quad \frac{\pi}{3} < x < \frac{2}{3}\pi$
$240° < x < 300$ $\quad \frac{4}{3}\pi < x < \frac{5}{3}\pi$

Es n. 43 pag 331   risolvere la seg. disequazione

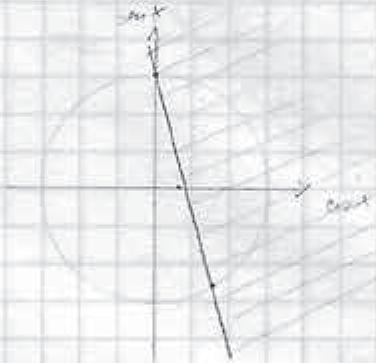
$(2-\sqrt{3})\,\text{sen}\,x + \cos x > 2-\sqrt{3}$

$(2-\sqrt{3})\,\text{sen}\,x + \cos x + \sqrt{3} - 2 > 0$

$(2-\sqrt{3})\,\text{sen}\,x + \cos x + \sqrt{3} - 2 = 0$

$\text{sen}\,x$	$\cos x$
0	$2-\sqrt{3}$
1	0

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}\,x = 1 < \begin{array}{l} 90^\circ \\ 90^\circ \end{array} \\ \cos x = 0 < \begin{array}{l} 90^\circ \\ 270^\circ \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow x = 90^\circ$$



$$\begin{cases} (2-\sqrt{3})\,\text{sen}\,x + \cos x + \sqrt{3} - 2 = 0 \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = 2-\sqrt{3} - (2-\sqrt{3})\,\text{sen}\,x \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$\text{sen}^2 x + 7 - 4\sqrt{3} - 2(7-4\sqrt{3})\,\text{sen}\,x + (7-4\sqrt{3})\,\text{sen}^2 x = 1$

$\text{sen}^2 x + 7 - 4\sqrt{3} - 14\,\text{sen}\,x + 8\sqrt{3}\,\text{sen}\,x + 7\,\text{sen}^2 x - 4\sqrt{3}\,\text{sen}^2 x - 1 = 0$

$8\,\text{sen}^2 x - 4\sqrt{3}\,\text{sen}^2 x - 2(7-4\sqrt{3})\,\text{sen}\,x + 6 - 4\sqrt{3} = 0$

$(4-2\sqrt{3})\,\text{sen}^2 x - (7-4\sqrt{3})\,\text{sen}\,x + 3 - 2\sqrt{3} = 0$

$$\text{sen}\,x = \frac{-4\sqrt{3}+7 \pm \sqrt{49-56\sqrt{3}+48-4(12-8\sqrt{3}-6\sqrt{3}+12)}}{8-4\sqrt{3}} = \frac{-4\sqrt{3}+7 \pm \sqrt{49-56\sqrt{3}+\cancel{48}-\cancel{48}+32\sqrt{3}+24\sqrt{3}-48}}{8-4\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{-4\sqrt{3}+7 \pm 1}{8-4\sqrt{3}} < \begin{array}{l} \dfrac{4\sqrt{3}-8}{-8+4\sqrt{3}} = +1 \\ \dfrac{-4\sqrt{3}+6}{8-4\sqrt{3}} = \dfrac{-2\sqrt{3}+3}{4-2\sqrt{3}} = \dfrac{(-2\sqrt{3}+3)(4+2\sqrt{3})}{(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})} = \dfrac{-8\sqrt{3}-12+12+6\sqrt{3}}{16-12} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = -\dfrac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}$$

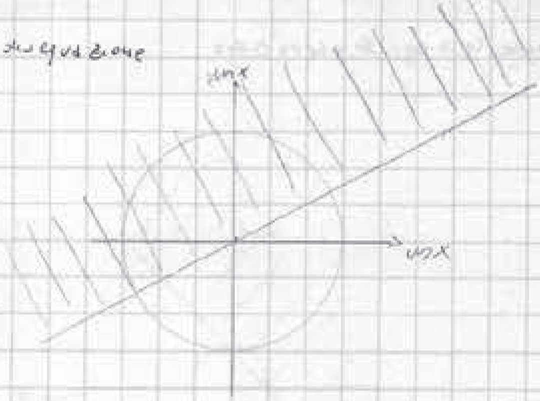
$$\begin{cases} \text{sen}\,x = +1 \\ \cos x = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} \text{sen}\,x = -\frac{1}{2}\sqrt{3} < \begin{array}{l} x = 300^\circ \\ x = -120^\circ \end{array} \\ \cos x = \frac{1}{2} < \begin{array}{l} x = 60^\circ \\ x = 300^\circ \end{array} \end{cases}\right\} x = 300^\circ$$

$0^\circ < x < 90^\circ$ et $300^\circ < x < 360^\circ$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ et $\frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$

Es n: 51 pag 351 risolvere la seg. disequazione



$\sqrt{2}\cos x - \sqrt{6}\,\text{sen}\,x < 0$

$\sqrt{2}\cos x - \sqrt{6}\,\text{sen}\,x = 0$

sen x	cos x
0	0
1	$\sqrt{3}$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x - \sqrt{6}\,\text{sen}\,x = 0 \Rightarrow \cos x = \sqrt{3}\,\text{sen}\,x \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$\text{sen}^2 x + 3\,\text{sen}^2 x = 1$

$4\,\text{sen}^2 x = 1$

$\text{sen}\,x = \pm\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{cases} \text{sen}\,x = \frac{1}{2} < \begin{matrix} x = 30° \\ x = 150° \end{matrix} \\ \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3} < \begin{matrix} 30° \\ 330° \end{matrix} \end{cases}\right\} x = 30°$$

&

$$\left.\begin{cases} \text{sen}\,x = -\frac{1}{2} < \begin{matrix} x = 210° \\ x = 330° \end{matrix} \\ \cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{3} < \begin{matrix} x = 210° \\ x = 150° \end{matrix} \end{cases}\right\} \Rightarrow x = 210°$$

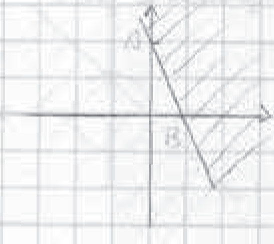
$30° < x < 210°$

$\frac{\pi}{6} < x < \frac{7}{6}\pi$

Esercizio risolvere la seg. disequazione.

$3x + y - 2 > 0$ (1)

$3x + y - 2 = 0$



x	y
A(0	+2)
B($\frac{2}{3}$	0)

$f(0,0) = -2$

le coordinate di tutti i punti del semipiano individuato dalla retta (1) che non contiene l'origine del riferimento risolvono la disequazione

Esercizio Risolvere la seg. disequazione

$\operatorname{sen} x - \cos x - 1 > 0$

$\operatorname{sen} x - \cos x - 1 = 0$

sen x	cos x
0	+5
2	1

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \cos x + 1 \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$\cos^2 x + 2\cos x + 1 + \cos^2 x = 1$

$2\cos^2 x + 2\cos x = 0$

$\cos_1 x = 0$

$\cos_2 x = -1$

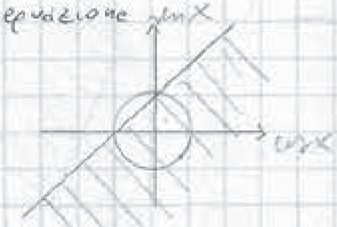
$$\left.\begin{cases} \cos x = 0 \ \begin{cases} 90° \\ 270° \end{cases} \\ \operatorname{sen} x = 1 \ \begin{cases} 90° \\ 90° \end{cases} \end{cases}\right\} \Rightarrow x = 90°$$

$$\left.\begin{cases} \cos x = -1 \ \begin{cases} 180° \\ 180° \end{cases} \\ \operatorname{sen} x = 0 \ \begin{cases} 0° \\ 180° \end{cases} \end{cases}\right\} \Rightarrow x = 180°$$

$90° < x < 180°$

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Esercizio Risolvere la seg. disequazione



$\operatorname{sen} x - \cos x - 1 < 0$

$\operatorname{sen} x - \cos x - 1 = 0$

~~sen² x + cos² x~~

sen x	cos x
0	5
2	1

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \cos x + 1 \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$2\cos^2 x + 2\cos x = 0$

$\cos_1 x = 0$

$\cos_2 x = 1$

$$\left.\begin{cases} \cos x = 0 \\ \operatorname{sen} x = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow x = 90°$$

$$\left.\begin{cases} \cos x = -1 \\ \operatorname{sen} x = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow x = 180°$$

$0° < x < 90°$ et $180° < x < 360°$

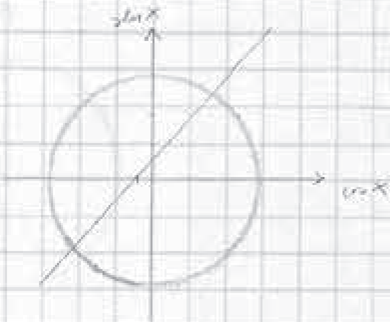
$0 < x < \frac{\pi}{2}$ et $\pi < x < 2\pi$

Esercizio

$2\sqrt{3}\,\text{sen}\,x - 4\cos x - 1 > 0$

$2\sqrt{3}\,\text{sen}\,x - 4\cos x - 1 = 0$

sen x	cos x
0	$-\frac{1}{4}$
$\sqrt{3}$	$\frac{5}{4}$



$$\begin{cases} 2\sqrt{3}\,\text{sen}\,x - 4\cos x - 1 = 0 \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$\cos x = \frac{2\sqrt{3}\,\text{sen}\,x - 1}{4}$

$\text{sen}^2 x + \frac{12\,\text{sen}^2 x - 4\sqrt{3}\,\text{sen}\,x + 1}{16} = 1$

$28\,\text{sen}^2 x - 4\sqrt{3}\,\text{sen}\,x - 15 = 0$

$\text{sen}\,x = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 + 420}}{28} = \frac{2\sqrt{3} \pm 12\sqrt{3}}{28} \quad \begin{matrix} -\frac{5}{14}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{matrix}$

$$\left.\begin{cases} \text{sen}\,x = \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}\right\} x = 60^\circ$$

$$\left.\begin{cases} \text{sen}\,x = -\frac{5}{14}\sqrt{3} \\ \cos x = -\frac{11}{14} \end{cases}\right\} x = \alpha \text{ dove } \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$$

$f(0,0) = -1$

$\frac{\pi}{3} < x < \alpha$

Esercizio

$\text{sen}^2 x - \text{sen}\,2x < 0$

$\text{sen}^2 x - 2\,\text{sen}\,x\cos x < 0$

$\text{sen}^2 x - 2\,\text{sen}\,x\cos x = 0$

poiché non esiste un angolo che annulli il coseno e nello stesso tempo risolva l'equazione allora si può dividere entrambi i membri dell'eq. per $\cos^2 x$ ottenendo una eq. equivalente.

$\text{tg}^2 x - 2\,\text{tg}\,x = 0$

$\text{tg}\,x\,(\text{tg}\,x - 2) = 0$

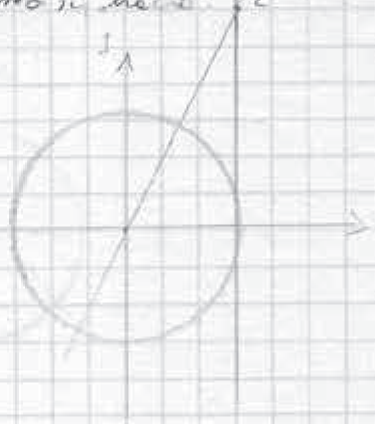
per la legge di annullamento del prodotto si ha:

$tg\, x = 0$

$tg\, x - 2 = 0 \Rightarrow tg\, x = 2$

$0 < tg\, x < 2$

$0 < x < 2$



Esercizio:

Dato la retta $y = 2x - 3$ e il punto $P(1,4)$, calcolare le coordinate del punto Q simmetrico di P rispetto alla retta

Chiamo x_1 e y_1 le coordinate del punto $Q \Rightarrow Q(x_1; y_1)$

$y - 4 = m(x - 1)$ impongo passaggio per

$$\begin{cases} y = mx - m + 4 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$$ condizione di perpendicolarismo

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$ eq. della retta passante per P e perpendicolare alla retta data.

$2x - 3 = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

$4x - 6 = -x + 9$

$5x = 15 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$ coordinate del punto M di intersezione fra le 2 rette

Poiché M è il punto medio del segmento PM, le sue coordinate soddisferanno le relazioni

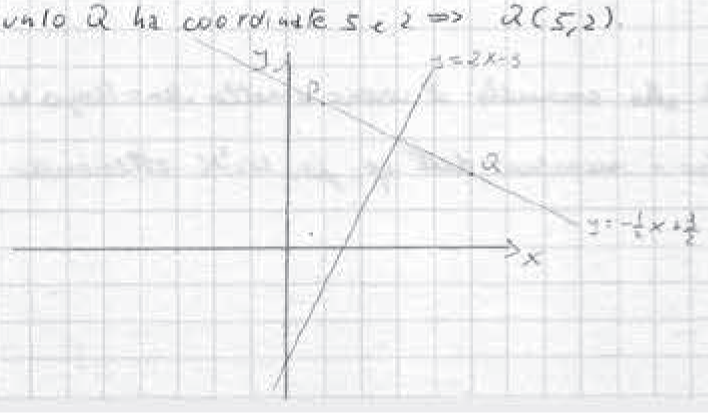
$\frac{x + x_1}{2} = 3$ in cui x è l'ascissa di P e x_1 l'ascissa di Q

$1 + x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 5$

$\frac{y + y_1}{2} = 3$ in cui y è l'ordinata di P e y_1 l'ordinata di Q.

$y_1 + 4 = 6 \Rightarrow y_1 = 2$

Pertanto il punto Q ha coordinate 5 e 2 $\Rightarrow Q(5,2)$.



Esercizio

Data la retta $y=-\frac{1}{2}x+4$ e il punto $P(2,7)$ determinare il punto Q simmetrico di P rispetto alla retta data e l'eq. della retta simmetrica alla $y=5x-1$ rispetto alla retta data.

$$\begin{cases} y = mx - 2m + 7 & \text{eq. del fascio di rette di centro } P \\ m = 2 & \text{condizione di perpendicolarità} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2}x + 4 = 2x + 3$$

$$-x + 8 = 4x + 6$$

$$5x = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{19}{5} \end{cases}$$ coordinate del punto R di intersezione fra le 2 rette.

$$\frac{x + x_1}{2} = \frac{2}{5}$$

$$5x + 5x_1 = 4$$

$$10 + 5x_1 = 4$$

$$5x_1 = -6$$

$$x_1 = -\frac{6}{5}$$

$$\frac{y + y_1}{2} = \frac{19}{5}$$

$$5y + 5y_1 = 38$$

$$35 + 5y_1 = 38$$

$$5y_1 = 3$$

$$y_1 = \frac{3}{5}$$

$$Q\left(-\frac{6}{5}; \frac{3}{5}\right)$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 4 \\ y = 5x - 1 \end{cases}$$

$$5x - 1 = -\frac{1}{2}x + 4$$

$$10x - 2 = -x + 8$$

$$11x = 10 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{11} \\ y = \frac{39}{11} \end{cases}$$

Es n: 45 pag 331

$3\cos x + \operatorname{sen}^2 x - 3 > 0$

$3\cos x + 1 - \cos^2 x - 3 > 0$

$\cos^2 x - 3\cos x + 2 < 0$

$\cos x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

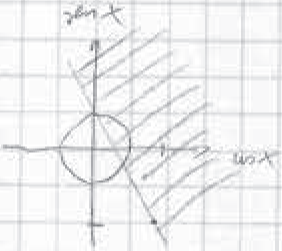
Impossibile

Es n: 23 pag 333

$\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x - 1 > 0$

$\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$

sen x	cos x
-2	$\sqrt{3}$
1	0



$\begin{cases} \sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = 1 - \sqrt{3}\cos x \\ \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$

$\cancel{1} - 2\sqrt{3}\cos x + 3\cos^2 x + \cos^2 x = \cancel{1}$

$2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$

$\cos_1 x = 0$

$\cos_2 x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\left.\begin{cases} \cos x = 0 < \begin{matrix} 90° \\ 270° \end{matrix} \\ \operatorname{sen} x = 1 < \begin{matrix} 90° \\ 90° \end{matrix} \end{cases}\right\} \Rightarrow x = 90°$

$\left.\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3} < \begin{matrix} 30° \\ 330° \end{matrix} \\ \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} < \begin{matrix} 330 \\ -30° \end{matrix} \end{cases}\right\} \Rightarrow x = 330°$

$330° < x < 360° \qquad 0 < x < 90°$

$\frac{11}{6}\pi < x < 2\pi \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

Ex nº 36 pag 334

$$\frac{\sin x+1}{1-4\sin^2 x} > \frac{\sin x-1}{2\sin x-1}$$

$$\frac{\sin x+1}{(1+2\sin x)(1-2\sin x)} + \frac{\sin x-1}{1-2\sin x} > 0 \qquad \sin x \neq \pm\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sin x+1+(\sin x-1)(1+2\sin x)}{(1+2\sin x)(1-2\sin x)} > 0$$

$$\frac{\cancel{\sin x}+\cancel{1}+\cancel{\sin x}+2\sin^2 x-\cancel{1}-\cancel{2\sin x}}{(1+2\sin x)(1-2\sin x)} > 0$$

$$\frac{2\sin^2 x}{(1+2\sin x)(1-2\sin x)} > 0$$

N: $2\sin^2 x > 0$ per $\sin x > 0$

D: $1+2\sin x > 0$ per $\sin x > -\frac{1}{2}$

$1-2\sin x > 0$ per $\sin x < \frac{1}{2}$

$\frac{N}{D} > 0$ per $0 < \sin x < \frac{1}{2}$

$150° < x < 180°$ et $0 < x < 30°$

$\frac{5}{6}\pi < x < \pi$ et $0 < x < \frac{\pi}{6}$

Compito del 7.5 1985

I) Data la retta s $y = -\frac{1}{2}x + 2$ e il punto $A(2;5)$, calcolare le coordinate del punto A_1 simmetrico ad A rispetto alla retta s. Calcolare inoltre l'equazione della retta simmetrica alla retta $y = 3x - 1$ rispetto alla retta data.

II) Risolvere la seguente disequazione:

$x - 4y + 2 < 0$

III) Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + 4 < 0 \\ 3x + y - 9 < 0 \end{cases}$$

IV) Risolvere la seguente disequazione

$\cos x > -\frac{1}{2}$

e facoltativamente

$\sin x + \cos x < 1$

nell'intervallo chiuso $0, 2\pi$

V) Risolvere la seguente equazione esponenziale:

$4^{\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right)} = 2^{\sqrt{x-3}}$

Risolvo.

I) Trovo l'equazione della retta che passa per A ed è perpendicolare ad s:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 5 = m(x - 2)$ condizione perché la retta passi per A

$$\begin{cases} y = mx - 2m + 5 \\ m = 2 \text{ condizione di perpendicolarità} \end{cases}$$

$y = 2x + 1$ eq. della retta perpendicolare ad s e passante per $A = t$

Trovo le coordinate del punto di intersezione tra s e t

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$$

$-\frac{1}{2}x + 2 = 2x + 1$

$-x + 4 = 4x + 2$

$5x = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{9}{5} \end{cases}$ $M\left(\frac{2}{5}; \frac{9}{5}\right)$

Trovo le coordinate del punto $A_1(x_1; y_1)$, simmetrico di A rispetto a s.

Ho indicato con x_1 e y_1 le coordinate del punto A_1:

$$\frac{x+x_1}{2} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2+x_1}{2} = \frac{2}{5}$$

$$10 + 5x_1 = 4$$

$$5x_1 = -6 \Rightarrow x_1 = -\frac{6}{5}$$

$$\frac{y+y_1}{2} = \frac{9}{5}$$

$$\frac{5+y_1}{2} = \frac{9}{5}$$

$$25 + 5y_1 = 18$$

$$5y_1 = -7 \Rightarrow y_1 = -\frac{7}{5}$$

$$A_1 \left(-\frac{6}{5}; -\frac{7}{5}\right)$$

Trovo le coordinate del punto di intersezione fra s e $y = 3x-1$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$$

$$3x - 1 = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$6x - 2 = -x + 4$$

$$7x = 6 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{7} \\ y = \frac{11}{7} \end{cases} \qquad N\left(\frac{6}{7}; \frac{11}{7}\right)$$

Trovo l'equazione della retta 2 perpendicolare a $y = 3x-1$ e passante per $M\left(\frac{2}{5}; \frac{9}{5}\right)$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{9}{5} = m\left(x - \frac{2}{5}\right)$$ condizione perché la retta passi per M

$$\begin{cases} y = mx - \frac{2}{5}m + \frac{9}{5} \\ m = -\frac{1}{3} \end{cases}$$ condizione di perpendicolarità

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{29}{15}$$ eq. della retta perpendicolare a $y = 3x-1$ e passante per M.

Trovo le coordinate del punto di intersezione tra 2 e $y = 3x-1$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{29}{15} \\ y = 3x - 1 \end{cases}$$

$$3x - 1 = -\frac{1}{3}x + \frac{29}{15}$$

$$45x - 15 = -5x + 29$$

$$50x = 44 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{22}{25} \\ y = \frac{41}{25} \end{cases} \qquad T\left(\frac{22}{25}; \frac{41}{25}\right)$$

23 Trovo le coordinate del punto Z simmetrico di N rispetto a $y = 3x - 1$.

Ne Indico con x_1 e y_1 le coordinate:

$$\frac{x+x_1}{2} = \frac{22}{25}$$

$$25x + 25x_1 = 44$$

$$10 + 25x_1 = 44$$

$$25x_1 = 34 \Rightarrow x_1 = \frac{34}{25}$$

$$\frac{y+y_1}{2} = \frac{41}{25}$$

$$25y + 25y_1 = 82$$

$$45 + 25y_1 = 82$$

$$25y_1 = 37 \Rightarrow y_1 = \frac{37}{25}$$

$$Z\left(\frac{34}{25}; \frac{37}{25}\right)$$

Trovo l'equazione della retta che passa per Z e N:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$y - \frac{37}{25} = m\left(x - \frac{34}{25}\right)$ condizione perché la retta passi per Z

$$y = mx - \frac{34}{25}m + \frac{37}{25}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$y - \frac{11}{7} = m\left(x - \frac{5}{7}\right)$ condizione perché la retta passi per N

$$y = mx - \frac{5}{7}m + \frac{11}{7}$$

$$\begin{cases} y = mx - \frac{34}{25}m + \frac{37}{25} \\ y = mx - \frac{5}{7}m + \frac{11}{7} \end{cases}$$

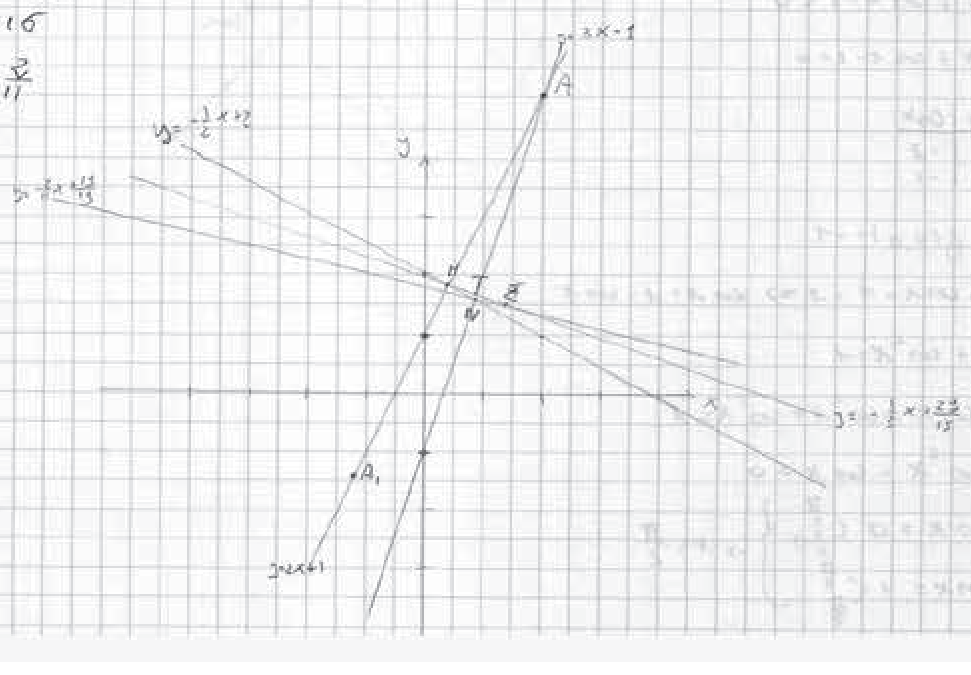
$$\cancel{mx} - \frac{5}{7}m + \frac{11}{7} = \cancel{mx} - \frac{34}{25}m + \frac{37}{25}$$

$$-150m + 275 = -238m + 259$$

$$88m = -16$$

$$m = -\frac{2}{11}$$

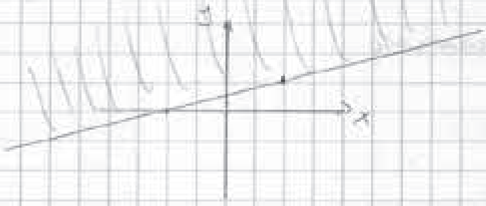
$$y = -\frac{2}{11}x + \frac{19}{11}$$



II) $x-4y+2<0$

$x-4y+2=0$

x	y
-2	0
2	1



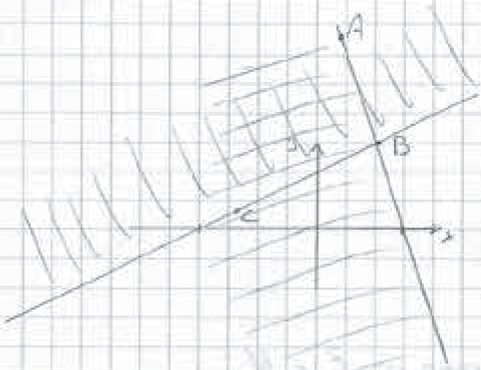
$f(0,0)=2$

Le coordinate di tutti i punti del semipiano individuato dalla retta $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ che non contiene l'origine, soddisfano la disequazione

III) $\begin{cases} x-2y+4<0 \\ 3x+y-9<0 \end{cases}$

$x-2y+4=0$

x	y
-4	0
0	2



$f(0,0)=4$

$3x+y-9=0$

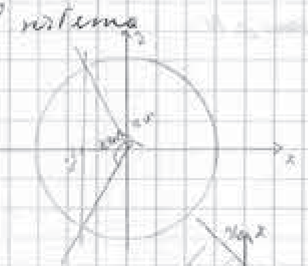
x	y
3	0
2	3

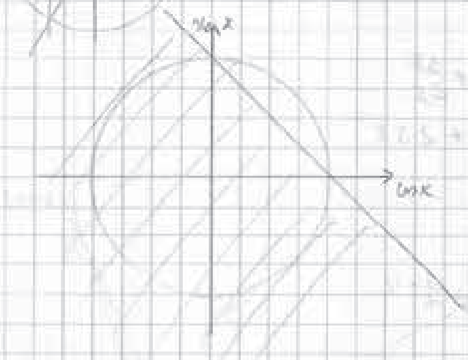
$f(0,0)=-9$

Tutti i punti del piano appartenenti all'angolo convesso $A\hat{B}C$ con le loro coordinate soddisfano il sistema

IV) $\cos x > -\frac{1}{2}$

$0<x<\frac{2}{3}\pi$ et $\frac{4}{3}\pi<x<2\pi$





$\operatorname{sen} x+\cos x<1$

$\operatorname{sen} x+\cos x-1<0$

$\operatorname{sen} x+\cos x-1=0$

$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
3	-2
2	-1

$f(0,0)=-1$

$\begin{cases} \operatorname{sen} x+\cos x-1=0 \Rightarrow \operatorname{sen} x=1-\cos x \\ \operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1 \end{cases}$

$1-2\cos x+\cos^2 x+\cos^2 x=1$

$\cos^2 x-\cos x=0$

$\left.\begin{cases} \cos x=0 < \begin{matrix}\frac{\pi}{2} \\ \frac{3}{2}\pi\end{matrix} \\ \operatorname{sen} x=1 < \begin{matrix}\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}\end{matrix} \end{cases}\right\} \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$

$$\left.\begin{cases} \cos x = 1 \; < {}^{0}_{2\pi} \\ \sin x = 0 \; < {}^{0}_{\pi} \end{cases}\right\} \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{\pi}{2} < x < 2\pi$$

V)

$$4^{\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right)} = 2^{\sqrt{2x-3}}$$

$$2^{2\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right)} = 2^{\sqrt{2x-3}}$$

$$2^{x-3} = 2^{\sqrt{2x-3}}$$

$$x - 3 = \sqrt{2x-3}$$

$$x^2 - 6x + 9 = 2x - 3$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$x = 4 \pm \sqrt{15-12} = 4 \pm 2 < {}^{2}_{6}$$

Verifico per $x = 2$

$$4^{1-\frac{3}{2}} = 2^{\sqrt{4-3}}$$

$$4^{-\frac{1}{2}} = 2$$

$x = 2$ non è accettabile

Verifica per $x = 6$

$$4^{3-\frac{3}{2}} = 2^{\sqrt{12-3}}$$

$$4^{\frac{3}{2}} = 2^{\sqrt{3}}$$

$$2^{2\cdot\frac{3}{2}} = 2^3$$

$$2^3 = 2^3$$

$x = 6$ è accettabile.