COMUNICAZIONI ELETTRICHE

Domande e Questionari

(24.1 e 30.1 di "ESERCIZI")

Lezione 1 - Cosa sono i segnali

- **Dare la definizione di segnali con assi dei tempi e delle ampiezze continui / discreti, presentando tutte le combinazioni possibili e relativi esempi pratici.**

Il segnale può essere definito il supporto fisico attraverso cui viene trasmessa o acquisita una informazione, con la generica annotazione di s(t). Il segnale non è l'informazione, ma lo strumento attraverso il quale l'informazione viene gestita, trasmessa, raccolta. Il parametro s può essere un qualsiasi parametro fisico, una pressione (segnale sonoro), una intensità luminosa (un video), una temperatura, eccetera.

I segnali sono distinguibili in base al loro comportamento nel tempo: segnali tempo-continui e segnali tempo-discreti le cui ampiezze possono essere continue e discrete.

Abbiamo:

- Segnali tempo-continui le cui ampiezze sono continue (sono i segnali analogici).
- Segnali tempo-continui le cui ampiezze appartengono a un insieme discreto, un insieme numerico di valori. Sono segnali di difficile individuazione funzionale, detti quantizzati.
- Segnali tempo-discreti, le cui ampiezze sono continue (sono i segnali campionati).
- Segnali tempo-discreti, le cui ampiezze appartengono ad un insieme discreto (sono i segnali digitali). Essi sono segnali noti soltanto in certi istanti di tempo. [Vd. Classificazione dei segnali]

esempi di segnali a tempo continuo sono l'elettrocardiogramma, che rappresenta l'andamento dell'attenzione raccolta dall'apparato biomedicale.

Esempio di segnali a tempo discreto è un segnale cinematografico, ottenuto proiettando un certo numero di immagini (frames) al secondo.

Esempio di segnali ad ampiezza continuo sono i segnali acustici e in generale i segnali osservati nei sistemi naturali.

Esempi di segnali ad ampiezza discreta è il segnale luminoso prodotto da una lampadina di un semaforo che può assumere solo due valori (acceso o spento) oppure i segnali binari che regolano il funzionamento dei circuiti elettronici digitali.

classificazione

Segnale	Tempo Continuo	Tempo Discreto
Ampiezza continua	segnale analogico, elettrocardiogramma, segnale in natura	Segnale campionato, segnale da digital signal processing, DSP, segnale cinematografico
Ampiezza discreta	segnale quantizzato, di difficile individuazione funzionale	Segnale digitale ed es. segnale binario in un calcolatore

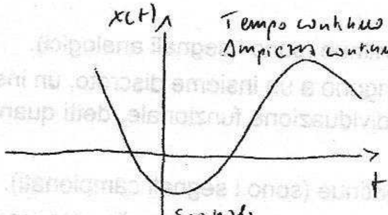
Classificazione dei segnali

TEMPO CONTINUO E AMPIEZZA CONTINUA => SEGNALI ANALOGICI

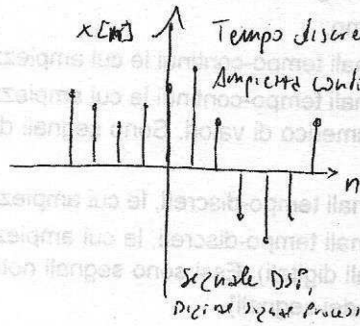
TEMPO DISCRETO E AMPIEZZA CONTINUA => SEGNALI DSP, CAMPIONATI

TEMPO DISCRETO E AMPIEZZA DISCRETA => SEGNALI DIGITALI O NUMERICI, calcolatore

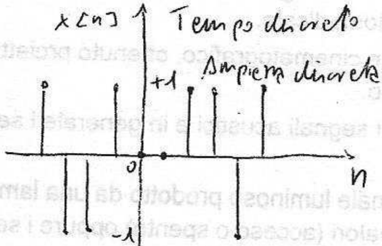
TEMPO CONTINUO E AMPIEZZA DISCRETA => nessun utilizzo



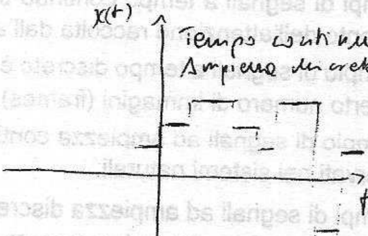
Segnale analogico



Segnale DSP, Digital Signal Processing



Segnale digitale, o numerico, usato nei calcolatori



Segnale quantizzato

Di nessuna utilità pratica

• Dato un segnale analogico con dominio temporale finito tra –T/2 e +T/2 scrivere le definizioni di energia e di potenza.

L'energia e la potenza di un segnale analogico con dominio temporale finito tra -T/2 e +T/2, quindi un intervallo T, sono definite come segue.

Energia di un segnale relativa all'intervallo T:

$$\boxed{E_T = \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt}$$

Energia di un segnale relativa all'intervallo T

Potenza di un segnale relativa all'intervallo T:

$$\boxed{P_T = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt}$$

Potenza di un segnale relativa all'intervallo T

• Introdurre le definizioni di energia e potenza quando 1) il dominio di definizione del segnale T tende a infinito e 2) il segnale è complesso.

1) Dalle definizioni di Energia e di Potenza di un segnale, se T tende ad infinito, si definiscono segnali di Energia quei segnali per cui l'energia rimane finita:

$$\boxed{E = \lim_{T \to \infty} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt}$$

Segnale di energia, se il limite è finito

Se il limite è finito allora il segnale è di Energia.

Si definiscono segnali di Potenza quelli per cui la potenza rimane finita e l'energia va all'infinito:

$$\boxed{P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt}$$

Segnale di potenza, se il limite è finito, come per i segnali periodici.

Se il limite è finito allora il segnale è di Potenza, e l'energia va a infinito.

Questi due tipi di segnali hanno una gestione analitica diversa.

2) Energia e Potenza di un segnale complesso.

Segnale complesso

$a(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \Phi)} = A\cos(2\pi f_0 t + \Phi) + jA\sin(2\pi f_0 t + \Phi)$

L'energia e la potenza di tali tipi di segnali sono definite come:

$$\boxed{E = \lim_{T \to \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 \, dt}$$

$$\boxed{P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 \, dt}$$

La differenza con i segnali reali è l'introduzione del modulo.

• Discutere la differenza, nel dominio del tempo, tra un segnale certo e un segnale aleatorio.

La differenza, nel dominio del tempo, tra un segnale certo e un segnale aleatorio è che per i segnali certi è conosciuto l'andamento nel tempo e sono conosciuti i parametri che li caratterizzano; per i segnali aleatori la conoscenza fino ad un certo istante di tempo non garantisce la conoscenza ad un istante successivo.

Lezione 2 - Segnali e Sistemi Lineari

• Discutere le proprietà di linearità e permanenza di un sistema.

La proprietà di linearità, sostanzialmente, afferma che all'uscita il segnale è una replica dell'ingresso, eventualmente ritardato e/o modificato in ampiezza.

Linearità

I segnali che trasportano informazione hanno un andamento nel tempo molto complesso e non facilmente descrivibile analiticamente.

Bisogna individuare delle descrizioni dei segnali che consentano di analizzarli in modo semplice e corretto, mettendone in evidenza le caratteristiche interessanti per particolari scopi.

Un problema fondamentale è il passaggio di un segnale attraverso uno o più dispositivi, uno o più sistemi che svolgono azioni particolari.

L'amplificazione, la modulazione e la demodulazione, il filtraggio, la rivelazione, sono operazioni fondamentali in molti dei sistemi di telecomunicazione e di telerilevamento.

Tutte le operazioni devono essere lineari, per questo tipo di problema della trasmissione dell'informazione, il passaggio attraverso i sistemi:

$$y(t) = k\, x(t-\tau)$$

Il segnale che sarà ricevuto alla fine di una certa elaborazione deve essere una replica, eventualmente ritardata di un tempo τ, eventualmente modificata in ampiezza, del segnale trasmesso.

Questo perché se l'informazione sta nell'andamento del segnale nel tempo, questo andamento non può essere modificato altrimenti l'informazione viene persa.

Il dover soddisfare una relazione come quella sopra impone che i sistemi siano lineari.

Sistemi lineari → sistemi per cui è applicabile il principio di sovrapposizione degli effetti

$$\boxed{x(t) = \sum_i a_i x_i(t) \Rightarrow y(t) = \sum_i a_i y_i(t)}$$

essendo $y_i(t)$ la risposta all'ingresso $x_i(t)$

In sostanza, se abbiamo un segnale x(t) decomponibile in una somma di tanti segnali elementari x_i con certi pesi rappresentati da a_i, allora il principio di sovrapposizione degli effetti viene rispettato se l'uscita y(t) è la combinazione lineare degli stessi coefficienti a_i delle risposte y_i ai singoli ingressi x_i.

Quando questa situazione è verificata allora è verificato il principio di sovrapposizione degli effetti.

Sistemi permanenti

La permanenza di un sistema è legata all'invarianza nel tempo delle caratteristiche e del funzionamento del sistema stesso.

$$\boxed{\begin{gathered} x(t) \Rightarrow y(t) \\ x(t-\tau) \Rightarrow y(t-\tau) \end{gathered}}$$

Ovvero ad un ingresso ritardato corrisponde una uscita ritardata.

• Discutere le proprietà di causalità e stabilità di un sistema.

La proprietà di causalità esprime il concetto per cui la causa non può precedere l'effetto e quindi l'uscita non può esistere prima dell'ingresso; la stabilità significa che, per un sistema stabile, ad un ingresso qualsiasi purché limitato in ampiezza, corrisponde un'uscita anch'essa limitata in ampiezza.

I vincoli di linearità, permanenza, causalità e stabilità sono applicati al problema della trasmissione di una informazione, con la pretesa che essa sia ricevuta senza degrado. Una soluzione è la decomposizione del segnale nella combinazione lineare di tanti segnali elementari, che siano semplici, e che siano semplici le situazione determinate dal loro passaggio dentro certi sistemi.

$$\boxed{x(t) = \sum_i a_i x_i(t)}$$

In figura la scomposizione del segnale

Per stabilire il legame esistente tra ingresso e uscita di un sistema lineare e permanente viene introdotto uno strumento matematico che è l'impulso di Dirac.

Si vedrà che l'uscita del sistema è determinata dalla convoluzione fra l'ingresso al sistema e la risposta impulsiva del sistema ovvero dalla relazione y(t) = x(t) * h(t), in cui, appunto, y(t) è l'uscita del sitema, x(t) è l'ingresso e h(t) è la risposta impulsiva del sistema, ovvero la risposta di un sistema lineare e permanente ad un impulso di Dirac; il simbolo "*" indica l'operazione di convoluzione.

• **Fornire la definizione di Impulso di Dirac e discuterne la proprietà campionatrice.**

Si definisce impulso di Dirac, $\delta(t)$, la funzione:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \text{rect}_{\Delta}(t)$$

La funzione di Dirac è una funzione nulla su tutto l'asse tranne che nel punto 0, dove ha un valore infinito e la sua area è unitaria:

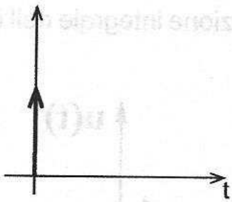
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

L'integrale

$$\int_{a}^{b} \delta(t - t_0)dt$$

vale 1 solo se il punto t_0 è interno all'intervallo (a, b).

Il simbolismo per indicare un impulso di Dirac (nel caso t = 0) è:



impulso di Dirac in t = 0

L'impulso di Dirac nel punto t_0 è definito come $\delta(t - t_0)$, ed esso serve per leggere un segnale nel punto t_0 stesso.

Questa è una proprietà dell'impulso di Dirac, detta proprietà campionatrice.

L'impulso di Dirac serve per leggere i segnali in certi punti.

Di seguito l'integrale di un segnale moltiplicato per l'impulso di dirac nel punto t_0.

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t_0)\delta(t-t_0)dt =$$

$$= s(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = s(t_0)$$

Si sostituisce al valore della funzione nel tempo il valore che la funzione assume nell'istante dove è applicato l'impulso di Dirac, ottenendo il risultato da un semplice passaggio.

In sostanza l'impulso di Dirac ha letto il valore della funzione nel punto t_0, dove l'impulso è applicato.

• Fornire le definizioni e le relative rappresentazioni grafiche delle funzioni gradino unitario u(t) e segno sgn(t) .

Il gradino unitario è definito come il segnale intergrale dell'impulso di Dirac, ed è un segnale molto utile.

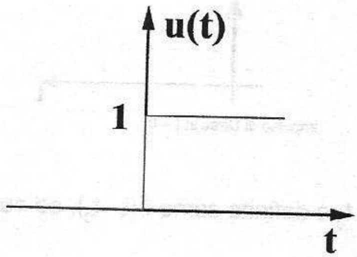
$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$$

L'impulso di Dirac è posizionato in $\tau = 0$, nell'origine del sistema di riferimento.

Se $t < 0$ allora l'impulso di Dirac è fuori dell'intervallo di integrazione, per cui l'integrale vale 0.

Se $t > 0$ allora l'impulso di Dirac è all'interno dell'intervallo di integrazione, quindi l'integrale vale 1.

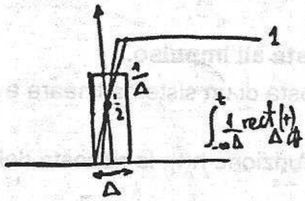
La conseguenza è che la funzione integrale dell'impulso di Dirac ha un andamento come sotto riportato:



in

È, sostanza, un segnale che individua gli istanti di tempo positivi.

Nella realtà, la transizione dal valore 0 a valore 1 non ha pendenza 90°, ma è tanto più ripida quanto più è piccolo l'intervallo Δ, quello della definizione dell'impulso di Dirac.



Se il gradino è l'integrale dell'impulso di Dirac allora l'impulso di Dirac è la derivata del gradino unitario:

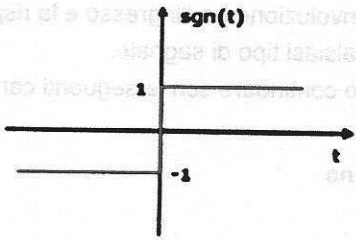
$$\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$$

L'introduzione dell'impulso di Dirac consente di estendere il concetto di derivata anche a funzioni che presentino discontinuità di prima specie.

Questo perché il gradino è una discontinuità.

La funzione segno è la funzione associata alla funzione di gradino, tramite la quale può essere definita.

$$sgn(t) = 2u(t) - 1$$



Lezione 3 - Transito dei Segnali in Sistemi LP

• Dare la definizione di risposta all'impulso.

La risposta impulsiva è la risposta di un sistema lineare e permanente ad un impulso di Dirac.

Definiamo risposta impulsiva, funzione h(t), la risposta del sistema all'ingresso $\delta(t)$.

• Giustificare il legame tra il segnale di uscita ed il segnale di ingresso in un sistema LP attraverso la definizione dell'operazione di convoluzione.

Il legame tra uscita e ingresso in un sistema lineare e permanente è dato dalla seguente relazione:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

L'integrale prende il nome di integrale di convoluzione. Dunque, per definizione, abbiamo che l'uscita y(t) di un sistema lineare e permanente, di risposta impulsiva h(t), è la convoluzione tra il segnale di ingresso e la risposta impulsiva.
La convoluzione è formalmente espressa come $y(t) = x(t) * h(t)$.
Dunque un sistema lineare e permanente è caratterizzato attraverso la risposta impulsiva h(t).

L'uscita è calcolata come convoluzione tra l'ingresso e la risposta impulsiva.

La convoluzione vale per qualsiasi tipo di segnale.

Sulla convoluzione possiamo continuare con le seguenti caratteristiche.

Proprietà della convoluzione

Proprietà della convoluzione tra due segnali x(t) e y(t)

☆ $c(t) = x(t) * y(t)$
$c(t) = y(t) * x(t)$

$c(t) = x(t) * \{y(t) + z(t)\} =$
$= \{x(t) * y(t)\} + \{x(t) * z(t)\}$

$c(t) = x(t) * \{y(t) * z(t)\} =$
$= \{x(t) * y(t)\} * z(t) =$
$= \{x(t) * z(t)\} * y(t)$

$x(t) = x(t) * \delta(t)$

La prima proprietà è la proprietà commutativa, facilmente dimostrabile.

Essa dimostra che traslando la x oppure traslando la y si ottiene lo stesso risultato, come di seguito:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau \qquad t-\tau=\vartheta$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\vartheta)\, y(\vartheta)\, d\vartheta$$

La seconda proprietà è la proprietà distributiva, facilmente dimostrabile per la proprietà di linearità dell'operazione di integrazione, come segue:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\left[y(t-\tau)+z(t-\tau)\right] d\tau = \underbrace{x*y}\ \ \underbrace{x*z}$$

La terza proprietà, associativa, è anch'essa facilmente dimostrabile.

La quarta proprietà afferma che l'ingresso è equivalente alla convoluzione tra l'ingresso e l'impulso di Dirac, $x(t) = x(t) * \delta(t)$

Questa quarta proprietà è già stata ricavata nella dimostrazione dell'esistenza dell'elemento neutro, ovvero che $a \cdot 1 = a$. Quindi l'impulso di Dirac è l'elemento unitario rispetto alla operazione di convoluzione.

Abbiamo detto che si caratterizza un sistema tramite la risposta impulsiva, di cui dobbiamo avere la capacità di calcolarla. Prima di questo introduciamo un nuovo tipo di risposta, la risposta indiciale.

La risposta indiciale

La risposta indiciale $y_i(t)$ è definita come la convoluzione tra la risposta impulsiva e il gradino unitario, formalmente scrivibile come un integrale; essa è molto importante in quanto la sua derivata è la risposta impulsiva del sistema:

Risposta indiciale

$$y_i(t) = h(t) * u(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

$$\frac{d}{dt} y_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, \delta(t-\tau) d\tau = h(t)$$

La derivata della risposta indiciale è la risposta impulsiva del sistema

Di seguito la derivata della risposta indiciale

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \underbrace{\frac{d}{dt} u(t-\tau)}_{\text{impulso di Dirac}} d\tau$$

Il fatto che la derivata della risposta indiciale sia la risposta impulsiva è un fatto importante.

• Discutere il legame tra il segnale di uscita ed il segnale di ingresso in un sistema LP nell'ipotesi in cui il segnale di ingresso sia di tipo sinusoidale.

L'uscita di un sistema lineare, caratterizzato da una risposta impulsiva h(t), quando l'ingresso è presente un segnale sinusoidale a frequenza f_0, è ancora una sinusoide con ampiezza e fase modificati, e con la stessa frequenza f_0.

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$$

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$$

$$y(t) = A\sqrt{\{c^2(f_0)+s^2(f_0)\}}\cos(2\pi f_0 t - \Phi_0)$$

$$\Phi_0 = tg^{-1}\{S(f_0)/C(f_0)\}$$

con

$$C(f_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cos(2\pi f_0 \tau)\, d\tau$$

$$S(f_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\sin(2\pi f_0 \tau)\, d\tau$$

~~~

Inoltre:

L'ingresso come esponenziale complesso

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$$

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$$

$$y(t) = e^{j2\pi f_0 t} H(f_0)$$

$$H(f_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-j2\pi f_0 \tau}\, d\tau$$

funzione di trasferimento, è la trasformata di Fourier di h(t), la risposta impulsiva.

L'uscita è l'ingresso modificato in ampiezza e fase attraverso la relazione $H(f_0)$.

Questo è un fatto importante perché quelle funzioni ci dicono che attraversano un sistema lineare e permanente caratterizzato da una risposta impulsiva h(t) rimanendo inalterati nel loro andamento nel tempo.
~~~

Lezione 4 - Il calcolo della Convoluzione

• Descrivere le fasi del calcolo della convoluzione tra due segnali x(t) e y(t) nel dominio del tempo.

La convoluzione è il prodotto di una funzione con un'altra funzione traslata. Il calcolo della convoluzione avviene in quattro fasi:

per definizione:

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

con x(t) e y(t) due segnali qualsiasi.

Per calcolare la convoluzione i 4 passi sono:

1. L'inversione dell'asse di uno dei due segnali. Si passa cioè da $y(\tau)$ a $y(-\tau)$ oppure da $x(\tau)$ a $x(-\tau)$.
2. Traslazione del segnale, il cui asse è stato invertito. La traslazione è negativa quando avviene verso sinistra ed è positiva quando avviene verso destra. Si passa in pratica da τ a $t - \tau$.
3. Si calcola il prodotto tra i due segnali.
4. Si calcola l'area del prodotto.

• Discutere cosa comporta operare la convoluzione tra un segnale generico x(t) e

- **un impulso di Dirac;** *(è un segnale traslato oppure il segnale stesso, dipende dal punto di applicazione dell'impulso di Dirac)*
- **un gradino unitario;** *(è un integrale)*
- **un segnale sinusoidale.** *(è un segnale sinusoidale, con ampiezza e fase modificati)*

La convoluzione con gli impulsi di Dirac comporta una traslazione.

Convoluzione con gli impulsi di Dirac

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

► il segnale è traslato nella posizione t_0.

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

L'impulso di Dirac è l'elemento unitario rispetto al prodotto di convoluzione

La convoluzione è ricondotta ad una operazione di traslazione; la convoluzione di un segnale con un impulso di Dirac è il segnale stesso; nel secondo caso si assume t0 = 0.

L'impulso di Dirac rispetta tutte le proprietà della moltiplicazione: associativa, distributiva e commutativa.

La convoluzione con un gradino comporta un integrale.

Convoluzione con un gradino

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \underbrace{u(t-\tau)}_{\boxed{\text{gradino traslato}}} d\tau$$

$$c(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

Il gradino è una funzione che vale 1 quando l'argomento è positivo e vale 0 quando l'argomento è negativo.

Come prima per il ritardo, si può ricondurre anche l'operazione di integrazione ad una operazione di convoluzione.

La convoluzione con un segnale sinusoidale porta ad un segnale sinusoidale con ampiezza e fase modificati.

Convoluzione con i segnali sinusoidali

$$c(t) = x(t) * \cos(2\pi f_0 t)$$ ◄ formalismo dell'operazione

▼risultato dell'operazione

$$c(t) = C(f_0)\cos(2\pi f_0 t) + S(f_0)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$c(t) = M(f_0)\cos(2\pi f_0 t - \Phi(f_0))$$ ◄ in coordinate polari

Si noti che il coseno ha la stessa frequenza del coseno di ingresso, con l'ampiezza modificata, da essere unitaria ad essere una diversa ampiezza, $M(f_0)$, e una fase non più nulla.

Ampiezza e fase sono funzioni della frequenza f_0 considerata.

Un segnale sinusoidale di una certa frequenza rimane un segnale sinusoidale della stessa frequenza attraverso l'operazione di convoluzione.

Lezione 5 - Lo sviluppo in serie di Fourier

• Riportare la formula dello sviluppo in serie di Fourier per un segnale x(t) e discutere le proprietà che deve avere x(t) affinché lo sviluppo sia valido.

Lo sviluppo in serie di Fourier è uno strumento per descrivere i segnali.

La formula dello sviluppo in serie di Fourier è:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kt/T) + b_k \sin(2\pi kt/T)$$

Lo sviluppo in serie di Fourier è valido per i segnali che soddisfano le condizioni di Dirichlet, ovvero:

. che i segnali siano assolutamente integrabili nell'intervallo [-T/2, T/2], cioè che l'integrale seguente esista e sia finito:

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|\, dt$$

. che il numero delle discontinuità di prima specie delle funzioni, nell'intervallo [-T/2, T/2], sia finito

. che il numero dei minimi e dei massimi nell'intervallo sia finito.

Se sono soddisfatte le condizioni di Dirichlet nell'intervallo [-T/2, T/2] allora lo sviluppo in serie di Fourier converge a x(t) nei punti di continuità; converge a ((x/t+) + (x(t-))/2 nei punti di discontinuità di prima specie, ovvero la convergenza è alla media tra il limite destro e sinistro dei due punti; all'esterno dell'intervallo [-T/2, T/2], lo sviluppo periodizza x(t).

Per calcolare i coefficienti occorre l'ortogonalità dei segnali, e, per definire questa occorre definire il prodotto scalare.

• Discutere la proprietà di ortogonalità tra due segnali a partire dalla definizione di prodotto scalare.

Il prodotto scalare è definito per tre casi di segnali:

a. Segnali di energia

b. Segnali di potenza

c. Segnali periodici o limitati nel tempo

Prodotto scalare per segnali di energia: $\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t)dt$

Prodotto scalare per segnali di potenza: $\lim_{\Delta\to\infty} \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} x^*(t)y(t)dt$

Prodotto scalare per segnali periodici o limitati nel tempo, all'intervallo T:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)y(t)dt$$

Si noti che x*(t) è il coniugato di x(t).

Se x(t) e y(t) sono lo stesso segnale, allora il prodotto scalare coincide con l'energia del segnale, se il segnale è un segnale di energia, e coincide con la potenza se il segnale è di potenza oppure un segnale periodico o limitato nel tempo. Infatti abbiamo quanto segue:

per segnali di energia: $\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = E_X$

per segnali di potenza: $\lim_{\Delta\to\infty} \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} x^*(t)x(t)dt = \lim_{\Delta\to\infty} \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} |x(t)|^2 dt = P_X$

per segnali periodici o limitati nel tempo: $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)x(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = P_X$

Dal prodotto scalare definiamo l'ortogonalità fra due segnali.

Due segnali sono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo.

Nel caso specifico di segnali limitati in tempo abbiamo: $\int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)y(t)dt = 0$

• Riportare la definizione di norma di un segnale generico x(t) e valutarla nel caso di segnale x(t) cosinusoidale.

La norma di un segnale x(t), $\|x\|$, è la quantità:

$$\sqrt{\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt} = \|x\|$$

La norma dei segnali sinusoidali e cosinusoidali è:

$$\sqrt{\int_{-T/2}^{T/2} |\cos(2k\pi t/T)|^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \{1 + \cos(4k\pi t/T)\} dt} = \sqrt{T/2}$$

$$\sqrt{\int_{-T/2}^{T/2} |\sin(2k\pi t/T)|^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \{1 - \cos(4k\pi t/T)\} dt} = \sqrt{T/2}$$

• Discutere le fasi analitiche per il calcolo dei coefficienti delle sviluppo in serie di Fourier del segnale x(t).

Dato lo sviluppo in serie di un segnale x(t), che è una somma di cosinusoidi e sinusoidi, con frequenza pari a k/T, che ha per sua natura la caratteristica di passare in sistemi lineari mantenendosi sinusoidale, ovvero

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kt/T) + b_k \sin(2\pi kt/T)$$

si tratta di calcolare i coefficienti a_0, a_k e b_k, per mezzo dell'ortogonalità dei segnali. Questi segnali sono tra loro ortogonali nell'intervallo T.

I segnali che formano la base dello sviluppo in serie di Fourier sono la costante (1) e segnali sinusoidali, coseno e seno, con argomento ($2\pi t/T$), ($4\pi t/T$), ..., ($2k\pi t/T$), quindi con frequenze che sono multipli interi dell'inverso della durata dell'intervallo T. La frequenza è dunque 1/T, 2/T, ..., k/T e questo significa rispettivamente che ci sono 1,2, ..., k periodi della funzione nell'intervallo, ovvero della frequenza.

I segnali che formano la base dello sviluppo in serie di Fourier sono tra loro ortogonali nell'intervallo T. Tali segnali sono dunque:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{1} & \cos(2\pi t/T) & \sin(2\pi t/T) \\ & \cos(4\pi t/T) & \sin(4\pi t/T) \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ & \cos(2k\pi t/T) & \sin(2k\pi t/T) \end{array}$$

Il calcolo dei coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier, ovvero a_0, a_k e b_k in

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kt/T) + b_k \sin(2\pi kt/T)$$

consiste nel moltiplicare entrambi membri dello sviluppo per cos(2πh/T) e poi integrare sull'intervallo T, quindi con estremi di integrazione [-T/2, T/2]. A questo punto si tiene conto dell'ortogonalità dei segnali e si ottiene:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos(2\pi kt/T)\,dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin(2\pi kt/T)\,dt$$

per k che va da 1 ad infinito

Nell'integrale di a_k e b_k c'è un prodotto scalare; 2/T è l'inverso della norma al quadrato.

Spettro di ampiezza e spettro di fase

Data l'espressione dello sviluppo in serie di Fourier del segnale $x(t)$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k t/T) + b_k \sin(2\pi k t/T)$$

in cui la frequenza è $\frac{k}{T}$

sappiamo che i coefficienti a_0, a_k e b_k contengono l'informazione del segnale $x(t)$.

Manipolando opportunamente l'espressione sopra otteniamo

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \cos(2\pi k t/T - \phi_k)$$

in cui $M_k = \sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2}$

La sommatoria sono coseni di ampiezza M_k e fase ϕ_k

Nella nuova relazione l'informazione del segnale $x(t)$ è localizzata in a_0, in M_k e in ϕ_k.

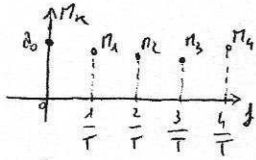
a_0 è la componente continua del segnale $\rightarrow a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, dt \Rightarrow$

$T \cdot a_0 =$ area del segnale $x(t)$

$\frac{1}{T}$ è la frequenza fondamentale

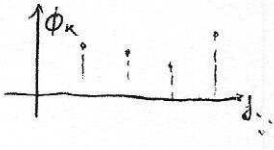
$\frac{2}{T}$ è la seconda armonica, $\frac{3}{T}$ la terza, ecc.

M_k è lo spettro di ampiezza unilatero



ϕ_k è lo spettro di fase

Si dimostra che, per il numero di armoniche che tende all'infinito, $n \to \infty$, $\phi_k \to 0$, ovvero le ampiezze tendono a zero, garantendo la convergenza.



Lezione 6 - Serie di Fourier bilatera

- **Definire la serie di Fourier bilatera per il segnale x(t) e i relativi coefficienti c_k.**

L'espressione dello sviluppo in serie di Fourier

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kt/T) + b_k \sin(2\pi kt/T)$$

può essere riscritta, grazie agli sviluppi di Eulero di seno e coseno, come

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{j2\pi kt/T}$$

i cui coefficienti, c_k, sono

$$c_k = \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi kt/T}\,dt$$

per $k = -\infty \ldots -2,-1,0,1,2,\ldots \infty$

Inoltre, lo spettro di ampiezza bilatero e lo spettro di fase bilatero sono, rispettivamente:

$$|c_k| = \frac{\sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2}}{2} \quad \text{Spettro di ampiezza bilatero}$$

e

$$\Phi_k = -\arg(c_k) = \operatorname{atn}\left(-\frac{b_k}{a_k}\right) \text{Spettro di fase}$$

• **Enunciare e dimostrare il Teorema di Parseval.**

[L.6 p.2]

IL TEOREMA di PARSEVAL

NEL CONTESTO DELLO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER BILATERA,
- IL TEOREMA di PARSEVAL AFFERMA CHE,

PER SEGNALI PERIODICI, O PER SEGNALI LIMITATI NEL TEMPO, IL PRODOTTO SCALARE DI DUE SEGNALI È UGUALE ALLA SOMMA DEI COEFFICIENTI DELLO SVILUPPO DEL SEGNALE CONIUGATO PER I COEFFICIENTI DELLO SVILUPPO DELL'ALTRO SEGNALE, CON GLI INDICI DEI COEFFICIENTI UGUALI, OVVERO [L5 p.5]

$$\underbrace{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)\cdot y(t)\,dt}_{\text{Prodotto scalare tra } x(t) \text{ e } y(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k^* \, y_k$$

Dimostrazione

Si sviluppano i due segnali secondo la serie di Fourier bilatera, poi si considera il coniugato di un segnale per applicare la definizione di prodotto scalare fra segnali di energia_
L'espressione che si trova è un integrale con una sommatoria, si può scambiare l'ordine, ottenendo due sommatorie e un integrale_
Applicando l'ortogonalità si arriva al risultato finale. Inoltre si considera il caso particolare in cui

i due segnali sono uguali, arriviamo alla espressione della potenza del segnale. In sostanza assumiamo che il prodotto scalare tra due segnali $x(t)$ e $y(t)$ è definito come

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)\, y(t)\, dt$$

I due segnali sono sviluppabili secondo Fourier e gli sviluppi sono

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{j2\pi k \frac{t}{T}} \qquad y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{j2\pi k\frac{t}{T}}$$

Dunque, sostituendo sopra, otteniamo

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k^* e^{-j2\pi k \frac{t}{T}} \cdot \sum_{h=-\infty}^{\infty} y_h e^{j2\pi h\frac{t}{T}}\, dt$$

Possiamo scambiare le somme con l'integrale e avere

$$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{h=-\infty}^{\infty} x_k^* y_h \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j2\pi(h-k)\frac{t}{T}}\, dt$$

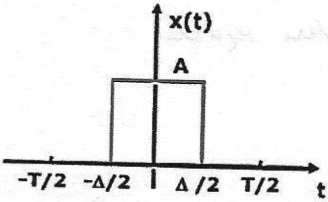
Per l'ortogonalità, l'integrale è nullo quando $h\neq k$ ed è pari a 1 quando $h=k$. Da questo deduciamo il Teorema di Parseval, per segnali periodici o segnali limitati nel tempo

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)\, y(t)\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k^* y_k$$

e se $x(t)=y(t)$

$$\underbrace{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|x(t)|^2}_{\text{potenza}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|x_k|^2$$

• **Derivare lo sviluppo in serie di Fourier per il segnale x(t) = Arect$_\Delta$, A = 1.**



L'impulso ha una ampiezza A e una durata Δ; l'impulso è inserito all'interno di un intervallo di larghezza T come prescritto dalla teoria dello sviluppo in serie di Fourier.

I coefficienti sono espressi dalla seguente relazione:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi kt/T}\,dt$$

Questa relazione si semplifica in quanto l'integrale si dovrà estendere solamente l'intervallo [-Δ/2, Δ/2], dove il segnale ha una ampiezza costante pari ad A. Dunque il coefficiente dello sviluppo di Fourier diventa

$$c_k = \frac{A}{T}\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^{-j2\pi kt/T}\,dt$$

in quanto x(t) = A nell'intervallo [-Δ/2, Δ/2].

L'esponenziale, secondo le formule di Eulero, si può sviluppare come un coseno - jseno, con il coseno che è una funzione pari e l'intervallo di integrazione è un intervallo pari e simmetrico, quindi il coseno da un contributo. Il seno, che è una funzione dispari, integrata sull'intervallo pari, quindi uguale come estensione, per tempi positivi per tempi negativi, darà un contributo nullo.

Dunque tale integrale è facilmente riconducibile al seguente, in cui, invece di considerare l'intervallo da -Δ/2 a Δ/2, si considera due volte l'integrale da 0 a Δ/2.

Dunque abbiamo:

$$c_k = \frac{2A}{T}\int_{0}^{\Delta/2} \cos(2\pi kt/T)\,dt$$

pari a:

$$c_k = \frac{A}{\pi k}\sin(\pi k\Delta/T) = \frac{A\Delta}{T}\,\mathrm{sinc}(\pi k\Delta/T)$$

in quanto, per definizione, sin(x)/x = sinc (x), seno cardinale.

• Definire lo sviluppo in serie di Fourier approssimato per il segnale x(t) e il relativo errore di approssimazione e(t), discutendone la dipendenza dall'ampiezza del segnale x(t).

Approssimare lo sviluppo significa troncare la serie a un numero finito (N) di armoniche e questo ne semplifica la rappresentazione.

Nel fare questo si commette un errore che è rappresentato dalla somma dei coefficienti scartati.

Dunque, dato il segnale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{j2\pi kt/T}$$

secondo lo sviluppo in serie bilatera di Fourier, in cui gli x_k sono i coefficienti dello sviluppo, c_k, pari a

$$c_k = \frac{a_k - jb_k}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j2\pi kt/T}\,dt$$

$$\text{per } k = -\infty \ldots -2,-1,0,1,2,\ldots \infty$$

Il segnale approssimato x_a è:

$$x_a(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e^{-j2\pi kt/T}$$

L'errore e(t) è:

$$e(t) = x(t) - x_a(t) = \sum_{|k|>N} x_k e^{j2\pi kt/T}$$

Si tratta a questo punto di avere uno strumento che dica quante sono le armoniche da considerare in modo da avere un errore tanto piccolo da poter accettare l'approssimazione.

Dunque si parla di concetto di completezza, in cui non si usa l'errore ma la potenza dell'errore, definito come segue:

$$\frac{1}{T}\|e\|^2 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |e(t)|^2\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t) - x_a(t)|^2\,dt = \sum_{|k|>N} |x_k|^2$$

che è una quantità positiva, decrescente al crescere di N, ma che dipende dall'ampiezza del segnale, dalla quale dobbiamo svincolarci.

Per fare questo si introduce il cosiddetto errore percentuale, ovvero si normalizza la potenza dell'errore alla potenza del segnale e si dirà che l'errore voluto è un tot % della potenza del segnale.

Per definizione l'errore percentuale $\mathcal{E}_2$ è la differenza tra la potenza del segnale, P_x, e la potenza del segnale approssimato, P_a, normalizzata alla potenza del segnale, ovvero

$$\varepsilon_2 = 1 - \frac{1}{P_x} \sum_{k=-N} |x_k|^2$$

$\mathcal{E}_2$ è l'errore percentuale, per cui si può fissare un errore % e, facendo i calcoli, si determinano con quanti coefficienti di Fourier si ha quell'errore.

Il valore di P_x, la potenza del segnale, nell'espressione soprastante, è determinata dal concetto di completezza.

Dunque, P_x, potenza del segnale è:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x^*(t)dt = P_x$$

Per la completezza un sistema uno sviluppo è completo rispetto ad una certa categoria di segnali. Per definizione essa è un limite, come di seguito riportato.

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t) - x_a(t)|^2 dt = 0 \quad \Rightarrow \textbf{COMPLETEZZA}$$

Dallo sviluppo del limite sopra riportato si determinano quattro espressioni, una è P_x, gli
le altretre sono l'espressione dello sviluppo dei coefficienti di Fourier, ovvero

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_a(t)x^*(t)dt = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=-N}^{N} |x_k|^2$$

, quindi abbiamo che

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t) - x_a(t)|^2 dt = P_x - \lim_{N \to \infty} \sum_{k=-N}^{N} |x_k|^2 = P_x - \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^2 = 0 \quad (\text{COMPLETEZZA} \Leftrightarrow \text{PARSEVAL})$$

Lezione 7 - Trasformata di Fourier

• Definire la trasformata e l'antitrasformata di Fourier del segnale x(t) a partire dallo sviluppo in serie di Fourier di x(t). Riportare la condizione di esistenza di X(f).

La trasformata di Fourier, X(f), di un segnale x(t) è definita come:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft}\, dt$$

Si passa cioè dal dominio del tempo al dominio della frequenza.

Questo risultato si ottiene partendo dallo sviluppo in serie di Fourier.

L'antitrasformata di Fourier, x(t), da X(f), è:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft}\, df$$

X(f) è in genere complessa anche se x(t) è reale.

L'esistenza della trasformata di Fourier implica la sommabilità di x(t) sull'intero asse dei tempi, ovvero,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$$

quindi x(t) è un segnale di tipo impulsivo.

...

... Per ricavare la Trasformata di Fourier del segnale x(t) ...

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

passando quindi dal dominio del tempo a quello della frequenza, si effettua un passaggio al limite dello sviluppo in serie (bilatera) di Fourier, per cui il segnale è dato dalla somma di infinite sinusoidi con coefficienti c_k.

Dallo sviluppo in serie di Fourier, abbiamo

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k t/T} \cdot \underbrace{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-j2\pi k t/T}\, dt}_{\text{coefficienti } c_k}$$

per $k = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, +\infty$

$\frac{1}{T}$ è la norma, l'integrale è del prodotto scalare del segnale ma anche la distanza fra le righe delle spettro di ampiezza e di fase per un esponenziale che individua la frequenza k/T, con k che va da $-\infty$ a $+\infty$

Si sostituisce $\frac{1}{T}$ con Δf, che è la distanza fra le frequenze.

Si estende arbitrariamente l'intervallo di consistenza del segnale, introducendo un nuovo segnale identico a quello iniziale, nell'intervallo iniziale e nullo al di fuori.

A questo punto lo sviluppo in serie è riscrivibile come

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k \Delta f_1 t} \cdot \Delta f_1 \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-j2\pi k \Delta f_1 t}\, dt$$

in cui $\frac{1}{T_1} = \Delta f_1 < \Delta f$

Operando un limite dello sviluppo in serie per $T \to \infty$ si passa dal salto discreto di frequenza Δf al differenziale df, da $k\Delta f$ a f e dalla sommatoria $\sum$ all'integrale $\int_{-\infty}^{\infty}$, ovvero

$$\Delta f \to df \quad ; \quad k\Delta f \to f \quad ; \quad \sum \to \int_{-\infty}^{\infty}$$

ottenendo

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f t}\, df \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt}_{\text{funzione della frequenza, per def. TRASFORMATA DI FOURIER}}$$

La Trasformata di Fourier, $X(f)$, funzione della frequenza, è

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

L'antitrasformata è il segnale $x(t)$, che è dunque

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

2) **Relazione tra trasformata di Fourier e i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier del segnale $x(t)$**

PER IL CALCOLO DEI COEFFICIENTI DELLO SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER, PER MEZZO DELLA TRASFORMATA DI FOURIER, ABBIAMO

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \qquad \text{definizione di T. di Fourier}$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-j2\pi k t}\, dt$$

da cui

$$c_k = \frac{1}{T}\, X\left(\frac{k}{T}\right)$$

3) Dato un segnale reale $x(t)$, dimostrare la parità della parte reale di $X(f)$

Per definizione $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$

l'esponenziale può essere scritto in forma trigonometrica, per mezzo delle formule di Eulero

$e^{jx} = \cos x + j \sin x$

$e^{-jx} = \cos x - j \sin x$, quindi

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) \cdot \cos(2\pi ft) - x(t) \cdot j \sin(2\pi ft)] dt$$

ovvero, scomponendo in due integrali la parte ~~reale~~ reale e la parte ~~...~~ immaginaria:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt$$

La parte reale, avendo un coseno, che è funzione pari, è una funzione pari

La parte immaginaria, avendo un seno, che è funzione dispari, è una funzione dispari.

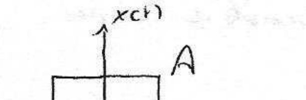
4) Calcolare la $X(f)$ di $x(t) = A\,\mathrm{rect}_\Delta(t)$

Questo segnale è un segnale reale e pari, la relativa trasformata di Fourier sarà reale e pari.

(LA T. di F. DI UN SEGNALE REALE E DISPARI È UNA TRASFORMATA IMMAGINARIA E DISPARI, immaginaria in quanto nello sviluppo trigonometrico rimane la parte con il seno, la parte immaginaria e, per la presenza del seno, dispari)

Dunque

$x(t) = A\,\mathrm{rect}_\Delta(t)$ si tratta di un impulso rettangolare centrato in $t=0$, di durata Δ, e di ampiezza A.



La trasformata di Fourier è

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

L'impulso rettangolare individua un intervallo, da $-\Delta/2$ a $\Delta/2$, in cui il segnale è non nullo, $x(t) \neq 0 = A$, e pari al Δ; altrove è nullo.

Dunque $X(f) = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} A\cdot e^{-j2\pi f t}\, dt$;

dalle formule di Eulero

$e^{-jx} = \cos x - j\sin x$, nell'intervallo rimane solo la funzione coseno in quanto l'intervallo è pari.

Inoltre, proprio perché l'intervallo è pari, ne posso considerare la metà, quella positiva, e moltiplicare il tutto per 2.

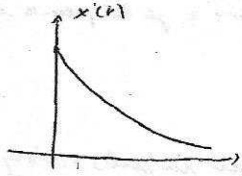
$$X(f) = 2\int_0^{\Delta/2} A\cdot\cos(2\pi f t)\, dt = 2A\,\frac{1}{2\pi f}\sin(2\pi f t)\Big|_0^{\Delta/2} =$$

$$= 2A\cdot\frac{1}{2\pi f}\cdot\sin\left(2\pi f\cdot\frac{\Delta}{2}\right) = \frac{A}{\pi f}\cdot\sin(\pi f\Delta) =$$

$$= \frac{A\cdot\Delta}{\pi f \Delta}\cdot\sin(\pi f\Delta) = A\Delta\,\mathrm{sinc}(\pi f\Delta).$$

5) Calcolare la $X(f)$ di $x(t) = u(t)$ a partire dal calcolo della trasformata di Fourier di $x'(t) = e^{-\alpha t} u(t)$

Per calcolare la trasformata di $x'(t) = e^{-\alpha t} u(t)$ ...



il segnale è nullo per tempi negativi, e per tempi positivi ha un andamento esponenziale decrescente.

Per verificare se il segnale ammette la trasformata di Fourier occorre verificare che

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\, dt < \infty$$

oppure, pensando all'energia del segnale, stabilire se il quadrato del segnale sia finito, ovvero se converge l'integrale

$$\int_0^\infty e^{-2\alpha t}\, dt ;$$

se converge un integrale allora converge anche l'altro

In effetti

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\, dt = -\frac{1}{\alpha} \left. e^{-\alpha t} \right|_0^\infty = \frac{1}{\alpha}$$

e

$$\int_0^\infty e^{-2\alpha t}\, dt = -\frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha t} \Big|_0^\infty = +\frac{1}{2\alpha}$$

dunque entrambi gli integrali convergono per cui esiste la trasformata di Fourier.

Applicando l'integrale di Fourier, la definizione stessa abbiamo

$$X'(f) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_0^\infty e^{-(\alpha + j2\pi f)t}\, dt$$

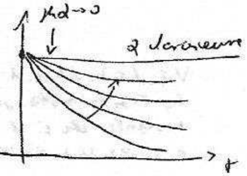
$$= -\frac{1}{a+j2\pi f}\, e^{-(a+j2\pi f)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j2\pi f}$$

Quindi

$$x'(t) = e^{-at}u(t) \longleftrightarrow X'(f) = \frac{1}{a+j2\pi f}$$

Per calcolare la trasformata di Fourier di $x(t) = u(t)$, da $x'(t) = e^{-at}u(t)$ si ricorre al limite

$$u(t) = \lim_{a\to 0} e^{-at}u(t)$$



Quindi

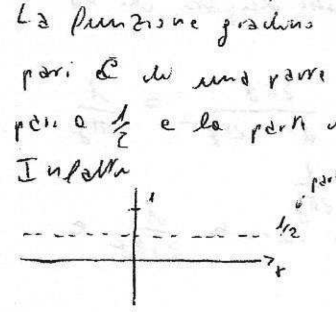
$$U(f) = \lim_{a\to 0}\frac{1}{a+j2\pi f}$$ che, razionalizzando, si spezza nella somma di una parte reale e una parte immaginaria e':

$$U(f) = \underbrace{\lim_{a\to 0}\frac{a}{a^2+(2\pi f)^2}}_{\text{parte reale = parte pari del segnale}} - j\underbrace{\lim_{a\to 0}\frac{2\pi f}{a^2+(2\pi f)^2}}_{\text{parte immaginaria corrisponde alla parte dispari del segnale}}$$

La funzione gradino è scrivibile come somma di una parte pari e di una parte dispari, la parte pari è una costante pari a $\frac{1}{2}$ e la parte dispari è la funzione $\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t)$.

Infatti

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}$$



sommando queste due parti si ottiene il gradino.
La parte pari è $\frac{1}{2}$, la cui trasformata è un impulso di Dirac; la parte dispari, calcolando il limite, è $\frac{1}{j\pi f}$

Dunque abbiamo

$$U(f) = \underbrace{\lim_{a\to 0} \frac{a}{a^2+(2\pi f)^2}}_{\text{parte reale, corrispondente alla parte pari del segnale}} - j \underbrace{\lim_{a\to 0} \frac{2\pi}{a^2+(2\pi f)^2}}_{\text{parte immaginaria, corrispondente alla parte dispari del segnale}}$$

Per quanto riguarda il $\lim_{a\to 0} \frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$, era già stato calcolato in precedenza, ed era l'impulso di Dirac, dimostrato nella lezione 11.

Quindi $\lim_{a\to 0} \underbrace{\frac{a}{a^2+(2\pi f)^2}}_{\text{l'area di questa funzione è } \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\delta(f)$ Vd. Lez. 11 p. 1 per la trasformata della costante che è il Dirac e come si deriva.

La parte reale tende all'impulso di Dirac di area $\frac{1}{2}$.

Per quanto riguarda la parte immaginaria $\lim_{a\to 0} \frac{2\pi f}{a^2+(2\pi f)^2}$, ci rendiamo conto che, per $a \neq 0$, la funzione è sempre nulla in $f=0$. Passa cioè per l'origine: è una funzione che ha al numeratore una funzione dispari e al denominatore una funzione pari, per cui la parte immaginaria è una funzione dispari che ha nell'origine un valore pari a 0.

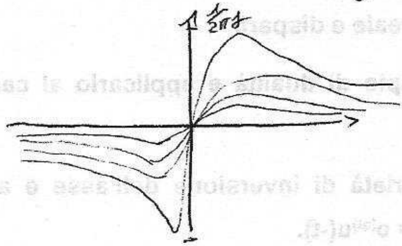
Il limite sarà $\frac{1}{2\pi f}$, cioè $\lim_{a\to 0} \frac{2\pi f}{a^2+(2\pi f)^2} = \frac{1}{2\pi f}$

in quanto per $a\to 0$ abbiamo $\frac{2\pi f}{2\pi f \cdot 2\pi f} = \frac{1}{2\pi f}$.

Includendo il $-j$, la parte immaginaria diventa $\frac{1}{2j\pi f}$ e quindi ricaviamo, infine che

$$U(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2j\pi f}$$

Considerando l'andamento della parte immaginaria abbiamo che al diminuire di a le funzioni tendono al valore $\frac{1}{2\pi f}$

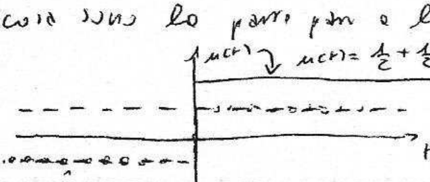


Dunque

$$x(t) = u(t) \longleftrightarrow X(f) = U(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2j\pi f}$$

Da questo si deduce che la trasformata di un gradino unitario è pari a metà di un impulso di Dirac (parte reale della trasformata) più $1/2j\pi f$.

Poiché abbiamo detto che la parte reale di una trasformata corrisponde alla parte pari e la parte immaginaria della trasformata corrisponde alla parte dispari, si può andare a vedere graficamente cosa sono la parte pari e la parte dispari



$\frac{1}{2}$, parte pari, la cui trasformata è il Dirac

$\frac{1}{2}\,sgn(t)$, parte dispari, la cui trasformata è $\frac{1}{2j\pi f}$, da cui si ricava la trasformata di Fourier della funzione segno:

$$x(t) = sgn(t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{j\pi f}$$

, un'altra trasformata limite, che vale 0 per $f=0$, in quanto tutte le funzioni che la generano valgono 0 nell'origine

Lezione 8/9/10 - Proprietà della Trasformata di Fourier

1) Riportare le caratteristiche della trasformata di Fourier di un segnale a) reale e pari e b) reale e dispari.

2) Discutere il principio di dualità e applicarlo al calcolo della trasformata di $x(t) = AB\text{sinc}(\pi Bt)$.

3) Discutere la proprietà di inversione dell'asse e applicarla al calcolo della trasformata di $x(t) = e^{(\alpha t)}u(-t)$.

4) Discutere l'effetto di un ritardo temporale t_0 sullo spettro di un segnale $x(t)$.

5) Discutere la proprietà di modulazione/prodotto.

6) Discutere analiticamente la trasformata del segnale $y(t)$ ottenuto derivando il segnale $x(t)$.

7) Discutere analiticamente la trasformata del segnale $y(t)$ ottenuto integrando il segnale $x(t)$ da $-\infty$ a t.

8) Calcolare la trasformata di Fourier del segnale $x(t) = tri_\Delta(t)$ (triangolo di semibase Δ, centrato in $t=0$, $x(0) = 1$).

1)

La trasformata di Fourier di un segnale reale e pari è reale e pari; di un segnale reale e dispari è immaginaria e dispari.

Se un segnale non è né pari né dispari avrà una trasformata con parte sia reale sia immaginaria che si sommano.

Il segnale, infatti, in questo caso sarà scomponibile in somma di una parte pari con una parte dispari, a cui, rispettivamente, corrisponderanno una trasformata reale e una trasformata immaginaria.

Questo deriva dal fatto che l'espressione generale della trasformata di Fourier può essere riscritta in forma trigonometrica, applicando le formule di Eulero.

La parte con il coseno è pari e quella col seno è dispari.
Ovvero

$$\underline{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$, in cui $x(t)$ è un segnale reale.

Si può dunque riscrivere $\underline{X}(f)$ come

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot [\cos(2\pi f t) - j\sin(2\pi f t)]\, dt,$$

ovvero

$$\underline{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \cos(2\pi f t)\, dt - j \int_{-\infty} x(t) \sin(2\pi f t)\, dt$$

La parte reale è una funzione pari di f, la parte immaginaria è una funzione dispari di f.

Lo spettro di ampiezza, $|\underline{X}(f)|$, è una funzione pari, infatti esso è

$$|\underline{X}(f)| = \sqrt{R_e^2(f) + Im^2(f)}$$

Lo spettro di fase, $\Phi_x(f)$, è una funzione dispari, infatti è

$$\Phi_x(f) = \arctan \frac{Im(f)}{Re(f)}$$

2) Il principio di dualità stabilisce che

se $x(t) \leftrightarrow X(f)$ allora $X(t) \leftrightarrow x(-f)$

Cioè se $\underline{X}(f)$ è la trasformata di Fourier del segnale $x(t)$, allora $X(t)$, che è il segnale temporale ottenuto scambiando la frequenza con il tempo, ha per trasformata, quindi in frequenza, il segnale $x(-f)$, quindi con l'asse delle frequenze rovesciato.

In pratica il principio di dualità risponde alla domanda:
se $\underline{X}(f)$ indico la trasformata di $x(t)$, qual è la trasformata

del segnale $X(t)$ che ha così lo stesso andamento temporale originariamente posseduto in ambito frequenziale dalla trasformata di $x(t)$? La risposta è che
se
$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$
allora $X(t) \leftrightarrow x(-f)$

Questo si dimostra considerando della relazione tra $x(t)$ e la sua trasformata, in sostanza il calcolo dell'antitrasformata. Poi si scambiano formalmente le variabili t ed f e poi si sostituisce f con $-f$.

In sostanza

$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi ft}\, df$, si scambiano le variabili t e f e si ottiene

$x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\, e^{j2\pi ft}\, dt$, ora si sostituisce f con $-f$ e si ottiene

$x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \cdot e^{-j2\pi ft}\, dt$

Dunque, dato $x(t) = AB\, \mathrm{sinc}(\pi B t)$, per calcolare la trasformata di Fourier per mezzo dell'integrale sarebbe un calcolo non semplice:

$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} AB\, \mathrm{sinc}(\pi B t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt$, con $\mathrm{sinc}\, x = \frac{\sin x}{x}$

Il principio di dualità ci viene incontro in quanto un impulso rettangolare di ampiezza A, centrato in Δ, ha per trasformata di Fourier $A\Delta\, \mathrm{sinc}(\pi f \Delta)$, cioè $x(t) = A\, \mathrm{rect}_\Delta(t) \leftrightarrow X(f) = A\Delta\, \mathrm{sinc}(\pi f \Delta)$

Dunque, per il principio di dualità

$$x(t) = AB\, \mathrm{sinc}(\pi B t) \leftrightarrow X(f) = A\, \mathrm{rect}_B(f)$$

3) Discutere la proprietà di inversione dell'asse (temporale) e applicarla al calcolo della trasformata di
$x(t) = e^{at} u(-t)$

Per la proprietà di inversione dell'asse temporale,

se $x(t) \longleftrightarrow X(f)$

e se $y(t) = x(-t)$

allora $x(-t) \longleftrightarrow X(-f)$

Se a $x(t)$ corrisponde $X(f)$ e se è stato rovesciato l'asse temporale, per cui $y(t)=x(-t)$, allora si dimostra che la trasformata si ottiene rovesciando la trasformata di partenza, $x(-t) \longleftrightarrow X(-f)$

Dimostrazione

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

Per la dimostrazione si prende l'espressione della trasformata, per $x(-t)$, con una sostituzione di variabile.
Dalla sostituzione di variabile abbiamo che SE SI ROVESCIA L'ASSE DEI TEMPI, SI DEVE ROVESCIARE L'ASSE DELLE TRASFORMATE

si pone $-t = \vartheta$, per cui

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\vartheta)\, e^{j2\pi f \vartheta}\, d\vartheta = \int_{-\infty}^{\infty} x(\vartheta)\, e^{-j2\pi(-f)\vartheta}\, d\vartheta$$

Quindi, dato il segnale $x(t) = e^{at} \cdot u(-t)$, per calcolarne la trasformata di Fourier, si considera il segnale $x'(t) = e^{-at} \cdot u(t)$, che rispetto al segnale $x(t)$ ha l'asse dei tempi rovesciato, ma di $x'(t)$ conosciamo la trasformata di Fourier, infatti

$$x'(t) = e^{-at} u(t) \longleftrightarrow X'(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

per cui, avendo un segnale con l'asse dei tempi rovesciato rispetto a $x'(t)$, si avrà una trasformata di Fourier che ha l'asse delle frequenze rovesciate rispetto a $X'(f)$, cioè, avendo $-t$ sui tempi si ha $-f$ in frequenza, per cui

$$x(t) = e^{at} u(-t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{a - j2\pi f}$$

in cui f è diventato, appunto, $-f$.

4) Discutere l'effetto di un ritardo temporale t_0 sullo spettro di un segnale $x(t)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Se } x(t) \leftrightarrow X(f) \\ \text{e } \; y(t) = x(t-t_0) \\ \text{allora } Y(f) = e^{-j2\pi f t_0} X(f) \end{array}\right\}$$

Dato un segnale noto $x(t)$ che ha un certo spettro $X(f)$, la trasformata di Fourier di un segnale traslato* nel tempo di un tempo t_0 è ottenuta moltiplicando lo spettro del segnale non traslato per un fattore che tiene conto della ~~ritardo~~ traslazione temporale, questo fattore è $e^{-j2\pi f t_0}$.

Dimostrazione

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)\, e^{-j2\pi f (t - t_0 + t_0)}\, dt$$

un artificio

da cui

$$Y(f) = e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)\, e^{-j2\pi f (t-t_0)}\, dt$$

e, ponendo $\vartheta = t - t_0$, abbiamo

$$Y(f) = e^{-j2\pi f t_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\vartheta)\, e^{-j2\pi f \vartheta}\, d\vartheta}_{\text{questo è } X(f)\text{, la trasformata di Fourier del segnale } x(t)} = e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

Quindi lo spettro del segnale ritardato è uguale allo spettro del segnale non ritardato moltiplicato per il fattore di ritardo $e^{-j2\pi f t_0}$, che è un esponenziale complesso con modulo unitario. Questo comporta che il modulo non cambia ovvero non dipende dal ritardo, il che è intuitivo, in quanto il ritardo non può cambiare il segnale. Lo spettro di fase, invece, cambia

$$|Y(f)| = |X(f)| \qquad \Phi_y(f) = \Phi_x(f) - 2\pi f t_0$$

↳ nel caso di anticipo, sarebbe un +; questo termine è la pendenza della retta su cui è appoggiato lo spettro di fase del segnale in posizione

* Se $t_0 > 0$ si ha un ritardo, se $t_0 < 0$ si ha un anticipo

5) Discutere la proprietà di modulazione prodotto.

La modulazione prodotto è una forma ben specifica di modulazione; la modulazione è una operazione necessaria altrimenti non sarebbero possibili le trasmissioni.

Per **modulazione di ampiezza** si intende la traslazione della trasformata di un segnale, quindi una traslazione in frequenza

Se $X(f) \leftrightarrow x(t)$ e da $X(f)$ si passa a $Y(f)$ traslando di f_0

e $Y(f) = X(f - f_0)$, quindi $Y(f)$ è uno spettro traslato

allora $X(f-f_0) \leftrightarrow e^{j2\pi f_0 t} \cdot x(t)$, al segnale traslato in frequenza corrisponde una certa operazione nel tempo.

Dimostrazione

$$\underbrace{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f-f_0)\, e^{j2\pi f t}\, df}_{\text{per def. di antitrasformata di Fourier}} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f-f_0)\, e^{j2\pi t(f - f_0 + f_0)}\, df$$

si toglie e si aggiunge f_0

ponendo $\Psi = f - f_0$, abbiamo

$$y(t) = e^{j2\pi f_0 t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} X(\Psi)\, e^{j2\pi \Psi t}\, d\Psi}_{\text{espressione dell'antitrasformata}} = e^{j2\pi f_0 t} \cdot x(t)$$

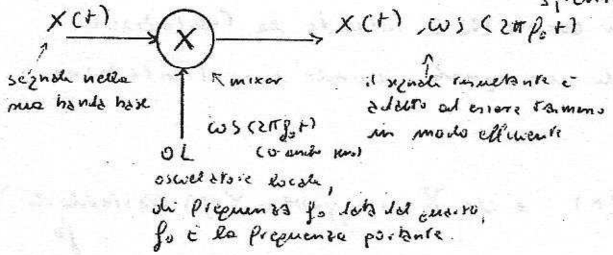
del segnale nel tempo $x(t)$,

Ψ è una frequenza

Dalla modulazione di ampiezza si passa alla modulazione prodotto, che ne è una forma ben specifica

La **modulazione prodotto** consiste nel moltiplicare un segnale nel tempo per un coseno (o un seno) di opportuna frequenza f_0, che è quella di traslazione

$$x(t)\cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left[\underbrace{X(f-f_0)+X(f+f_0)}_{\text{spettro del segnale risultante}}\right]$$



il risultato è dato dall'applicazione della formula di Eulero

$$\cos x = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$$

in cui il coseno è decomposto nella somma di due esponenziali

Lo spettro risultante dalla modulazione prodotto è portato intorno alla frequenza f_0, che serve per la trasmissione.

Lo spettro nasce in banda base del segnale $x(t)$, che può essere un audio, con frequenze da 0 a 4 kHz, o un video, con frequenze da 0 a 5 MHz.

Tramite la modulazione prodotto viene traslato in frequenza alla frequenza f_0, che serve per la trasmissione.

Si pensi infatti ad una voce (freq. da 0 a 4 kHz) che si attenua dopo pochi metri.

Si modula, dunque, in trasmissione, e si demodula in ricezione nella stessa banda da cui si era partiti.

Abbiamo le seguenti relazioni:

$x(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f-f_0)$ un segnale, moltiplicato per un esponenziale, viene traslato

$1 \longleftrightarrow \delta(f)$ si associa l'unità ad un impulso di Dirac

$e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow \delta(f-f_0)$

$A\cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{A}{2}\delta(f-f_0)+\frac{A}{2}\delta(f+f_0)$; $A\sin(2\pi f_0 t) = -j\frac{A}{2}\delta(f-f_0)+j\frac{A}{2}\delta(f+f_0)$

Dunque, ricapitolando

$e^{j2\pi f_0 t} \cdot x(t) \longleftrightarrow X(f-f_0)$, un segnale $x(t)$ moltiplicato per un esponenziale, viene traslato

$1 \longleftrightarrow \delta(f)$, si associa l'unità, questo perché (Lez. 8): . . .,

$x(t) = \delta(t) \longleftrightarrow X(f) = 1$, in quanto

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = 1$$

e questo perché l'impulso di Dirac legge il valore della funzione nel punto $t=0$, quello di applicazione. In $t=0$ l'esponenziale vale 1, quindi l'integrale è pari all'integrale dell'impulso di Dirac, che per def. è 1

$1 \longleftrightarrow \delta(f)$ si ottiene per la dualità.

$e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow \delta(f-f_0)$, si applica a Dirac la prima operazione, ottenendo che a un esponenziale complesso corrisponde un impulso di Dirac che, invece di essere in 0, è in f_0.
Questo permette di ottenere lo spettro di un segnale cosinusoidale.

$$A \cdot \cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{A}{2}\delta(f-f_0) + \frac{A}{2}\delta(f+f_0)$$

(f_0: freq. portante), questo è ottenuto grazie alle formule di Eulero, per cui

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$$

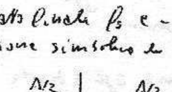
ovvero $\cos x = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$

e grazie a

$e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow \delta(f-f_0)$.

Nel risultato finale f_0 e $-f_0$ sono la rappresentazione simbolica di una stessa freq.

spettro di ampiezza del coseno, con f_0 che è la portante



due impulsi di Dirac, uno centrato in f_0 e uno in $-f_0$

Lo spettro di fase è nullo

$$A \sin(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow -j\frac{A}{2}\delta(f-f_0) + j\frac{A}{2}\delta(f+f_0)$$

, questo risultato è ottenuto applicando $\operatorname{sen} x = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$.

Si nota che lo spettro di ampiezza del seno è lo stesso di quello del coseno. Il seno ha uno spettro di fase di $\pm\frac{\pi}{2}$

6) Discutere analiticamente la trasformata del segnale $y(t)$ ottenuto derivando il segnale $x(t)$

La trasformata della derivata di un segnale

se $x(t) \longleftrightarrow X(f)$

e $y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$

allora $\frac{d}{dt} x(t) \longleftrightarrow j2\pi f \cdot X(f)$

dato il segnale $x(t)$, la cui trasformata è $X(f)$, e il segnale $y(t)$, ottenuto derivando $x(t)$, la trasformata della derivata del segnale $x(t)$ è la trasformata del segnale $x(t)$ per il fattore $j2\pi f$.

Dimostrazione

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df =$$

* poiché stiamo derivando rispetto al tempo, l'unica espressione coinvolta è l'exp.

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \underbrace{\frac{d}{dt} e^{j2\pi f t}}_{\text{si effettua la derivata dell'exp.}} df =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{X(f) \cdot j2\pi f}\cdot e^{j2\pi f t}\, df \text{; con}$$

questa è formalmente una operazione di antitrasformazione del prodotto $X(f) \cdot j2\pi f$, quindi si ha che la derivata del segnale è l'antitrasformata di

$X(f) \cdot j2\pi f$

n.b.: per $y(t) = \frac{d^n}{dt^n} x(t) \longleftrightarrow Y(f) = (j2\pi f)^n X(f)$

(estensione della derivata ad ordini superiori)

Dunque una operazione di derivazione nel tempo diventa una operazione di prodotto in frequenza.

L'antitrasformata della derivata di uno spettro

Se $x(t) \leftrightarrow X(f)$

e $Y(f) = \frac{d}{df} X(f)$

allora $-j2\pi t \cdot x(t) \leftrightarrow \frac{d}{df} X(f)$

Si deriva in frequenza, quindi si ottiene uno spettro conosciuto attraverso l'operazione di derivazione.

Allo spettro che si ottiene derivando in frequenza uno spettro noto corrisponde, nel dominio del tempo un segnale che si ottiene moltiplicando il segnale di partenza per $-j2\pi t$

Dimostrazione

$$\frac{d}{df} X(f) = \frac{d}{df} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{df}\, x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{d}{df} e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} -j2\pi t\; x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \qquad ; \text{c.v.d.}$$

Questa è l'espressione della trasformata di Fourier, che stiamo trasformando il prodotto $-j2\pi t \cdot x(t)$ e la relativa trasformata di Fourier è, appunto, $\frac{d}{df} X(f)$

Tale proprietà dell'antitrasformata può essere utilizzata considerando il segnale

$y(t) = -2j\pi t \cdot x(t)$, che può essere utile per avere una chiave molto semplice per trovare la trasformata di un segnale che si può mettere sottoforma di un prodotto fra la variabile t e un segnale $x(t)$; infatti

$$t \cdot x(t) \longleftrightarrow \frac{1}{-2j\pi} \frac{d}{df} X(f)$$

Inoltre, estendendo la derivata agli ordini superiori, abbiamo

$$(-2j\pi t)^n\, x(t) \leftrightarrow \frac{d^n}{df^n} X(f)$$

e $t^n x(t) \leftrightarrow \frac{1}{(-2j\pi)^n} \frac{d^n}{df^n} X(f)$

7) Discutere analiticamente la trasformata del segnale $y(t)$ ottenuto integrando il segnale $x(t)$ da $-\infty$ a t.

Trasformata dell'integrale di un segnale

se $x(t) \longleftrightarrow X(f)$

e $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\vartheta)\,d\vartheta$

allora $Y(f) = \frac{1}{2j\pi f} X(f)$

solo se $y(t)$ è trasformabile

è dato un segnale noto $x(t)$, di cui è nota la trasformata di Fourier. Si definisce un segnale $y(t)$ che è l'integrale di $x(t)$ da $-\infty$ a t. La trasformata dell'integrale, $Y(f)$ è uguale alla trasformata del segnale originario divisa per il fattore $2j\pi f$. Dunque anche la trasformata dell'integrale di un segnale è un prodotto, quello tra la trasformata del segnale originario e $1/2j\pi f$.

Dimostrazione

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\vartheta)\,d\vartheta$$

deriviamo entrambi i membri si ottiene:

$$\frac{d}{dt} y(t) = x(t)$$

trasformando entrambi i membri

$$2\pi j f\, Y(f) = X(f)$$

da cui

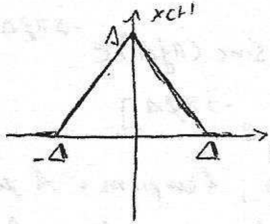
$$Y(f) = \frac{1}{2\pi j f} X(f)$$

a questo punto si può pensare di usare, nel dominio trasformato, ovvero quello delle frequenze, le regole precedenti per le quali la derivata vuol dire moltiplicare per $2j\pi f$. Quindi si ottiene che la trasformata della derivata di $y(t)$ è $2j\pi f \cdot Y(f)$, e la trasformata di $x(t)$ è $X(f)$. Dalla relazione ottenuta si ottiene la dimostrazione della proprietà.

deve valere la condizione per cui $y(t)$ deve essere trasformabile; lo è $x(t)$, ma lo deve essere anche $y(t)$, in quanto non è affatto detto che l'integrale di un segnale trasformabile sia un segnale trasformabile secondo Fourier.

Dunque la trasformazione ha valore solo nel caso in cui anche il segnale $y(t)$, ottenuto come integrazione di $x(t)$, sia trasformabile.

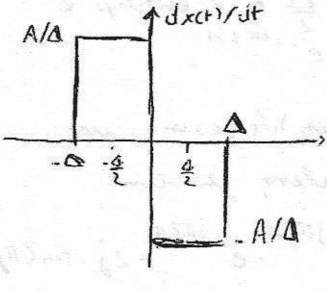
8) Calcolare la trasformata di Fourier del segnale $x(t) = tri_{\Delta}(t)$, che è il triangolo di semibase Δ, centrato in $t=0$, $x(0)=1$, cioè 1 è l'ampiezza).



$x(t) = A \cdot tri_{\Delta}(t)$

L'impulso triangolare ha una ampiezza A e una base larga 2Δ. Poiché le durate degli impulsi si misurano convenzionalmente tra i punti al 50% del massimo, possiamo dire che questo segnale ha una durata Δ.

Per determinare la trasformata di questo segnale non è conveniente usare la definizione, ma, poiché il segnale è trasformabile, in quanto la sua area ($\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt = A\cdot\Delta$) è $A\cdot\Delta$ e quindi finita, ne facciamo una derivata.



Poiché da $-\Delta$ a 0 il triangolo era crescente e la pendenza è positiva e pari ad A/Δ si individua un primo rettangolo.
Si individua poi un secondo rettangolo dato da una pendenza negativa del triangolo [da 0 a Δ, pendenza di valore $-A/\Delta$.

Il segnale ottenuto dalla derivazione è sicuramente trasformabile, e il suo integrale è trasformabile, per cui non avremo problemi ad applicare la regola dell'integrazione.

$$\frac{d}{dt}x(t) = \underbrace{\frac{A}{\Delta}\, rect_{\Delta}\left(t+\frac{\Delta}{2}\right)}_{\substack{\text{rettangolo a sinistra} \\ \text{centrato in } -\frac{\Delta}{2}, \\ \text{di durata } \Delta \text{ e} \\ \text{ampiezza } \frac{A}{\Delta}}} - \underbrace{\frac{A}{\Delta}\, rect_{\Delta}\left(t-\frac{\Delta}{2}\right)}_{\text{rettangolo a destra}} = \frac{A}{\Delta}\left[rect_{\Delta}\left(t+\frac{\Delta}{2}\right) - rect_{\Delta}\left(t-\frac{\Delta}{2}\right)\right]$$

La derivata è data dalla combinazione lineare di due rettangoli

Dunque la derivata del segnale dato, l'impulso triangolare, è dato da due rettangoli.

Le trasformate dei due rettangoli sono

$$D_x(f) = A \operatorname{sinc}(\pi f \Delta) e^{j\pi f \Delta} - A \operatorname{sinc}(\pi f \Delta) e^{-j\pi f \Delta} =$$

$$= A \operatorname{sinc}(\pi f \Delta) [e^{j\pi f \Delta} - e^{-j\pi f \Delta}]$$

In pratica si tratta di $\frac{\sin x}{x}$ ridotta alla durata Δ, l'ampiezza è A poiché si tratta di scrivere l'area dei segnali rettangolari che è A. Di essi, uno è definito attraverso un fattore di anticipo che ci porta a $\frac{\Delta}{2}$, il secondo è definito attraverso un fattore di ritardo, pari a $\frac{\Delta}{2}$.

Per definizione il fattore di ritardo è $e^{-j2\pi f t_0}$ con $t_0 = \pm\frac{\Delta}{2}$, quando $t_0 > 0$ si ha un ritardo, $t - t_0$; quando $t_0 < 0$ si ha un anticipo, $t + t_0$, quindi $-\frac{\Delta}{2}$ è l'anticipo e $+\frac{\Delta}{2}$ è il ritardo, da cui $e^{j\pi f \Delta}$ e $e^{-j\pi f \Delta}$.

L'esponenziale in $D_x(f)$ è esprimibile come un seno, per mezzo delle formule di Eulero, per cui

$\operatorname{sen} x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$, per cui $e^{j\pi f \Delta} - e^{-j\pi f \Delta} = 2j \cdot \sin(\pi f \Delta)$, quindi

$D_x(f) = 2j \cdot A \operatorname{sinc}(\pi f \Delta) \cdot \sin(\pi f \Delta)$, che è la trasformata della derivata del segnale in esame, l'impulso triangolare.

Per passare alla trasformata dell'impulso triangolare, sapendo che il suo integrale è trasformabile, si divide per $2j\pi f$, per cui

per ottenere un sinc

$$X(f) = \frac{\cancel{2j} A \operatorname{sinc}(\pi f \Delta) \cdot \sin(\pi f \Delta)}{\cancel{2j}\pi f} \left(\frac{\Delta}{\Delta}\right) = A\Delta \operatorname{sinc}^2(\pi f \Delta)$$

durata

1) Dare la definizione di segnali con asse dei tempi e/o asse delle ampiezze continui o discreti: presentare tutte le combinazioni possibili, per ciascuna di esse disegnare un esempio e spiegare a quale segnale di un'applicazione pratica potrebbe corrispondere. Dato un segnale analogico temporale finito tra $-T/2$ e $T/2$ scrivere le definizioni di energia e di potenza.

Il segnale può essere definito come il supporto fisico attraverso cui viene trasmessa o acquisita una informazione. I segnali sono distinguibili in base al loro comportamento nel tempo: segnali tempo-continui e segnali tempo-discreti, le cui ampiezze possono essere continue o discrete. Abbiamo dunque la seguente classificazione:

- segnali tempo-continui e ampiezza continua = segnali analogici
- segnali tempo-continui e ampiezza discreta = segnali quantizzati
- segnali tempo-discreti e ampiezza continua = segnali campionati
- segnali tempo-discreti e ampiezza discreta = segnali digitali

ovvero

Segnale	Tempo-continuo	Tempo-discreto
Ampiezza continua	segnali analogici, elettrocardiogramma, segnali in natura; $x(t)$, t	segnali campionati, DSP; $x(t)$, t
Ampiezza discreta	segnali quantizzati nei circuiti; t	segnali binari, nei calcolatori; $x(t)$, t

Dato il segnale $x(t)$ analogico temporale finito, nello intervallo $-T/2$, $T/2$, si definiscono energia e potenza del segnale le grandezze seguenti:

$$E_T = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\, dt \qquad P_T = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\, dt$$

~ ~ ~

2) Dare la definizione di un sistema lineare e permanente. Dare la definizione di risposta all'impulso e giustificarne l'importanza descrivendo il legame tra il segnale di uscita e il segnale di ingresso.

La linearità di un sistema significa che l'uscita di un sistema a cui è applicato un ingresso è una replica dell'ingresso, l'uscita potrà aver subito una attenuazione, o una amplificazione, ed eventualmente un ritardo. Ovvero, dato l'ingresso $x(t)$, l'uscita $y(t)$ è del tipo $y(t) = k \cdot x(t-\tau)$, in cui τ è un ritardo e $k>0$ è una attenuazione se $k<1$, ed è una amplificazione se $k>1$. L'andamento del segnale non può essere modificato altrimenti l'informazione che contiene il segnale andrebbe persa.

La permanenza di un sistema è legata alla invarianza nel tempo delle caratteristiche e del funzionamento del sistema stesso: in sostanza ad un ingresso ritardato nel tempo corrisponde una uscita ritardata: $x(t) \Rightarrow y(t)$

e $x(t-\tau) \Rightarrow y(t-\tau)$

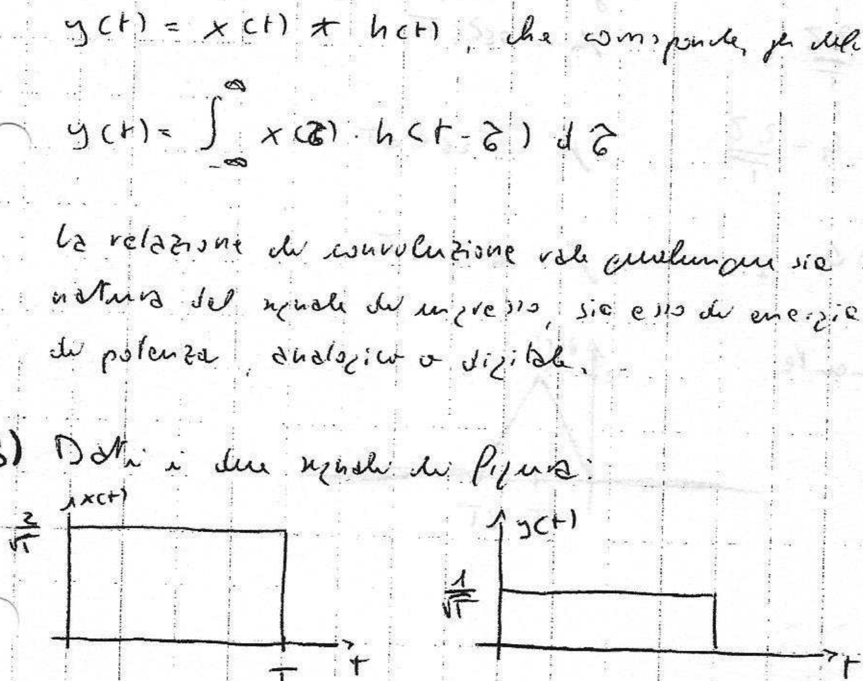
La risposta all'impulso, o risposta impulsiva, è la

risposta del sistema, quindi l'uscita del sistema, quando all'ingresso è applicato un impulso di Dirac.
Tale funzione è detta $h(t)$.
La risposta impulsiva è importante in quanto un sistema è caratterizzato dalla risposta impulsiva e l'uscita del sistema è calcolata come la convoluzione tra l'ingresso e la risposta impulsiva, ovvero
$y(t) = x(t) * h(t)$, che corrisponde, per definizione, a:

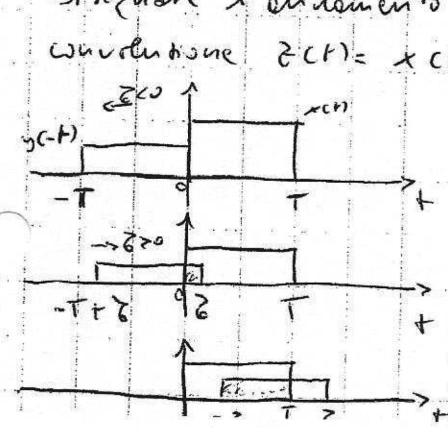
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

La relazione di convoluzione vale qualunque sia la natura del segnale di ingresso, sia esso di energia o di potenza, analogico o digitale.

3) Dati i due segnali di figura:



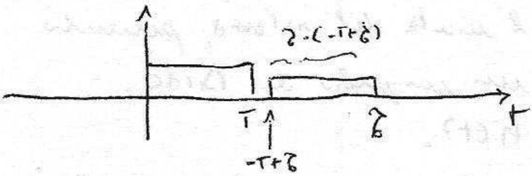
Disegnare l'andamento sull'asse dei tempi della loro convoluzione $z(t) = x(t) * y(t)$



Si ribalta $y(t) \to y(-t)$, per traslazione a sinistra, quindi per $\tau<0$, la convoluzione è nulla. Dunque $z(t)=0$ per $\tau<0$.

Per $0<\tau<T$, traslazione positiva, dunque a destra,
$z(t) = \int_0^{\tau} \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{2}{\sqrt{T}}\, dt = \frac{2t}{T}\Big|_0^{\tau} = \frac{2\tau}{T}$

per $T<\tau<2T$ $z(t) = \int_{-T+\tau}^{T} \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{2}{\sqrt{T}}\, dt = \frac{2t}{T}\Big|_{-T+\tau}^{T} =$
$2 - (-2T+2\tau) \ldots 2\tau \ldots 2\tau$



per $t \geq 2T$

$z(t) = 0$

Dunque:

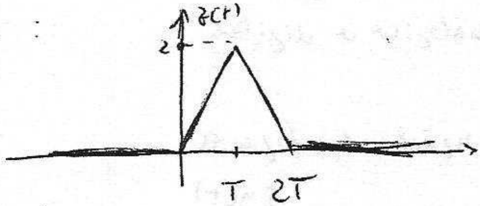
$z(t) = 0$ per $\tau \leq 0$

$z(t) = \dfrac{2\tau}{T}$ per $0 \leq \tau \leq T$

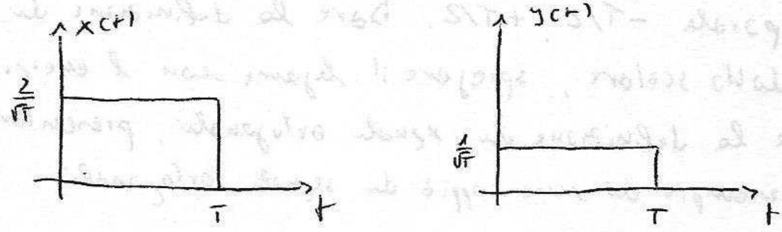
$z(t) = 4 - \dfrac{2\tau}{T}$ per $T \leq \tau < 2T$

$z(t) = 0$; per $\tau \geq 2T$

Graficamente:



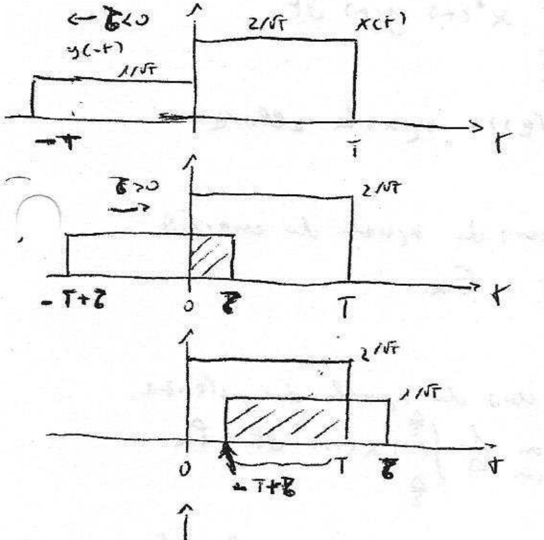
3) Dati i due segnali di figura:



Disegnare l'andamento sull'asse dei tempi della loro convoluzione $z(t) = x(t) * y(t)$

Gli step da seguire per effettuare la convoluzione dei due segnali sono:

1) ribaltare uno dei due segnali rispetto al tempo; prendendo $y(t)$ esso diventa $y(-t)$
2) traslare il segnale ribaltato a sinistra (tempi negativi) e a destra tempi positivi
3) Calcolare il prodotto dei due segnali
4) Calcolare l'area del prodotto dei due segnali.



Il segnale $y(t)$ ribaltato $\Rightarrow y(-t)$, per traslazioni a sinistra, quindi per tempi negativi, la convoluzione è 0. Dunque $z(t) = 0$ per $\tau \leq 0$

Per $0 \leq \tau \leq T$, traslazioni positive, è dato

$$z(t) = \int_0^{\tau} \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot \frac{2}{\sqrt{T}}\, dt = \left.\frac{2t}{T}\right|_0^{\tau} = \frac{2\tau}{T}$$

per $T \leq \tau \leq 2T$

$$z(t) = \int_{-T+\tau}^{T} \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{2}{\sqrt{T}}\, dt = \left.\frac{2t}{T}\right|_{-T+\tau}^{T}$$

$$= 2 - \left(\frac{-2T+2\tau}{T}\right) =$$

$$= 2 + 2 - \frac{2\tau}{T} = 4 -$$

per $\tau \geq 2T$
$z(t) = 0$

Nel tempo

4) Sono dati due segnali analogici reali di dominio temporale $-T/2$, $+T/2$. Dare la definizione di prodotto scalare, spiegare il legame con l'energia. Dare la definizione di segnali ortogonali, presentare un esempio di una coppia di segnali ortogonali.

Il prodotto scalare è definito per tre casi di segnali: 1. segnali di energia; 2. segnali di potenza; 3. segnali periodici o limitati a un intervallo T.

PRODOTTO SCALARE DI DUE SEGNALI DI ENERGIA : $\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\, y(t)\, dt$, $x^*(t)$ è il coniugato di $x(t)$

PRODOTTO SCALARE DI DUE SEGNALI DI POTENZA : $\lim_{\Delta\to\infty} \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} x^*(t)\, y(t)\, dt$

PRODOTTO SCALARE DI DUE SEGNALI PERIODICI o LIMITATI ALL'INTERVALLO T : $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)\, y(t)\, dt$

Se $x(t)$ e $y(t)$ sono lo stesso segnale allora il prodotto scalare

1) coincide con l'energia nel caso di segnali di energia

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = E_x$$

2) coincide con la potenza nel caso di segnali di potenza

$$\lim_{\Delta\to\infty} \frac{1}{\Delta}\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} x^*(t)\, x(t)\, dt = \lim_{\Delta\to\infty} \frac{1}{\Delta}\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} |x(t)|^2\, dt = P_x$$

3) coincide con la potenza nel caso di segnali periodici o limitati all'intervallo T

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)\, x(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2\, dt = P_x$$

Due segnali sono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo.

Nel caso specifico di segnali limitati in tempo

$$\int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)\, y(t)\, dt = 0 \quad \Rightarrow x(t) \text{ e } y(t) \text{ sono segnali ortogonali}$$

È detta norma la quantità $\sqrt{\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\, dt} = \|x\|$

I segnali che formano la base dello sviluppo in serie di Fourier sono tra loro ortogonali nell'intervallo T, tali segnali sono

la costante : 1

il coseno : $\cos(2\pi t/T)$, $\cos(4\pi t/T)$, ..., $\cos(2\pi k t/T)$

il seno : $\sin(2\pi t/T)$; $\sin(4\pi t/T)$; ...; $\sin(2\pi k t/T)$

Una coppia di segnali ortogonali è la costante con il coseno o il seno, infatti

$$\int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot \cos(2k\pi t/T)\, dt = 0$$

e $$\int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot \sin(2k\pi t/T)\, dt = 0$$

in quanto abbiamo un numero pari di periodi, con un numero di aree positive pari a quello delle aree negative.

Anche ogni coseno è ortogonale agli altri segnali della base, e ogni seno è ortogonale agli altri segnali della base. [Lez. 5]

5) Dare la definizione di Trasformata di Fourier e di antitrasformata di Fourier.
Dato un segnale $x(t)$ dimostrare le proprietà di simmetria della parte reale e parte immaginaria della sua trasformata di Fourier.

Per definizione la Trasformata di Fourier, $X(f)$, è:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

e questo risultato si ottiene operando un limite dello sviluppo in serie di Fourier per $T \to \infty$.

L'antitrasformata di Fourier è

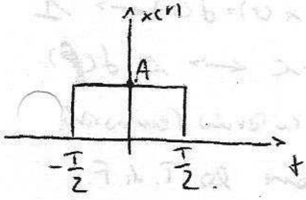
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi f t}\, df$$

La proprietà di simmetria della parte reale e della parte immaginaria della trasformata di Fourier di un segnale $x(t)$ risiede nel fatto che $X(f)$ può essere scritta come

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi f t)\, dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi f t)\, dt$$

in quanto $e^{-j2\pi f t} = \cos(2\pi f t) - j \sin(2\pi f t)$,
ovvero $e^{-jx} = \cos x - j \sin x$

6) Dato il segnale di figura:



scrivere (no dimostrare) l'espressione della sua trasformata di Fourier $X(f)$. Individuare i valori di frequenza dove si verifica $X(f)=0$ e disegnare approssimativamente l'andamento di $X(f)$ sull'asse delle frequenze.

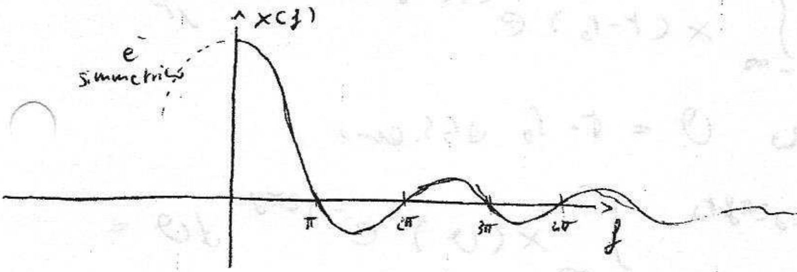
Il segnale è $x(t) = A\,\mathrm{rect}_T(t)$

la sua trasformata di Fourier è:

$$X(f) = AT\,\mathrm{sinc}(\pi f T)$$, in cui $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$

$X(f)=0$, ogni π, ovvero $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi \dots$

L'andamento qualitativo è



7) Presentare

- (no dimostrazione) la trasform. di F. di $x(t)=\delta(t) \longleftrightarrow 1$
- " " $x(t)=c \longleftrightarrow c\cdot\delta(f)$
- (con dimostrazione) l'effetto di un ritardo temporale sulla trasformata di Fourier: calcolare la T. di F. di $x(t-t_0)$ ed esplicitare il legame rispetto a $X(t)$

$$x(t-t_0) \longleftrightarrow X(f)\cdot e^{-j2\pi f t_0}$$

Effetto del ritardo sullo spettro del segnale

Dimostrazione

dato $x(t) \longleftrightarrow X(f)$

e $y(t) = x(t-t_0)$

allora $Y(f) = X(f)\, e^{-j2\pi f t_0}$

Infatti, per definizione

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)\, e^{-j2\pi f (t - \overset{\text{ausilio}}{t_0 + t_0})}\, dt$$

ponendo $\vartheta = t - t_0$ abbiamo

$$Y(f) = e^{-j2\pi f t_0}\cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\vartheta)\, e^{-j2\pi f\vartheta}\, d\vartheta}_{} =$$

$$= e^{-j2\pi f t_0}\, X(f)$$

8) Presentare (dimostrazione facoltativa) la T. di F. di

- $x(t) = e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow X(f) = \delta(f - f_0)$
- $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow X(f) = \frac{A \cdot 1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}A\delta(f + f_0)$
- $x(t) = A\sin(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow X(f) = -j\frac{1}{2}A\delta(f - f_0) + j\frac{1}{2}A\delta(f + f_0)$

→ Traslazione della Trasformata

→ modulazione prodotto

La traslazione della trasformata di un segnale

se $x(t) \longleftrightarrow X(f)$

e $Y(f) = X(f - f_0)$, cioè $Y(f)$ è uno spettro traslato

allora

$$e^{j2\pi f_0 t} \cdot x(t) \longleftrightarrow X(f - f_0)$$

Dimostrazione

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f - f_0)\, e^{j2\pi f t}\, df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f - f_0)\, e^{j2\pi f (f - f_0 + f_0)}$$

$$y(t) = e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} X(\varphi)\, e^{j2\pi t \varphi}\, d\varphi = e^{j2\pi f_0 t}\, x(t)$$

Per la dimostrazione del coseno e del seno si applicano le formule di Eulero:

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

9) Dimostrare il Teorema di Parseval per segnali che ammettono la Trasformata di Fourier L.12

Per il Teorema di Parseval per segnali trasformabili secondo Fou l'energia E_x di un segnale $x(t)$ è calcolabile, indifferentemente, nel dominio del tempo o nel dominio delle frequenze, in quanto vale la seguente relazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \, df = E_x$$

$x(t)$ è un segnale di energia e quindi trasformabile secondo Fourier

Dimostrazione

Dati due segnali di energia, e quindi trasformabili, il loro prodotto scalare è:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \, y(t) \, dt$$, riscriviamo la $y(t)$ sotto forma di antitrasformata di Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) \, e^{+j2\pi f t} \, df \, dt$$

Se si sviluppa prima l'integrazione in tempo e poi quella in frequenza si riscrive il tutto mettendo l'integrale in tempo ed eventualmente quello in frequenza.

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(f) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \, e^{+j2\pi f t} \, dt}_{= X^*(f)} \, df = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) \, Y(f) \, df$$

Se i due segnali sono uguali il teorema è dimostrato.

10) Presentare la Trasformata di Fourier delle seguenti funzioni e discutere l'effetto sullo spettro di $x(t)$ sull'asse delle frequenze

$$x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2} X(f-f_0) + \frac{1}{2} X(f+f_0)$$

è una modulazione prodotto, lo spettro risultante è portato intorno alla frequenza f_0

$$x(t) * \cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow X(f) \cdot \left[\frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0) \right]$$

La convoluzione con un segnale sinusoidale[1.4] produce un segnale sinusoidale della stessa frequenza, con ampiezza e fase modificate.

Quindi $x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ produce una traslazione dello spettro di $x(t)$ intorno a f_0 e a $-f_0$

e

$x(t) * \cos(2\pi f_0 t)$ non ha effetto sulla frequenza.

11) Spiegare il problema che si ha a dare una definizione di banda per un segnale a durata finita e dare la definizione di banda a 3 dB, chiarendola con una figura.

Ci sono diverse definizioni di banda di un segnale, una legata all'energia accettabile del segnale, una legata all'andamento della forma d'onda nel tempo, una legata alla definizione di banda a 3 dB, una legata alla definizione di banda equivalente di un segnale, e un'altra quella di durata equivalente di un segnale.

Per quanto riguarda la banda per un segnale a durata finita, si può dire che un segnale con durata limitata ha banda infinita e, dualmente, un segnale con banda limitata ha durata illimitata.
Per un segnale di durata finita e spettro di larghezza infinita abbiamo

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi ft}\, df \quad , \text{ def. di antitrasformata}$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\, df$$

Poiché la larghezza dello spettro è infinita occorre limitarla adottando una approssimazione del segnale, x_a, definita in una banda compresa tra $-B$ e B. Tale segnale è equivalente al segnale originale nell'intervallo $-B, B$, e nullo altrove.
Dunque $x_a(t)$ è limitato in frequenza da un rettangolo di ampiezza $2B$, quindi abbiamo
$x_a(t) = \int_{-B}^{B} X(f)\, e^{j2\pi ft}\, df$
$X_a(f) = X(f)\, \mathrm{rect}_{2B}(f)$
$E_a = \int_{-B}^{B} |X(f)|^2 df$, E_a è l'energia del segnale approssimato, limitato alla banda B.

Dunque questa è una definizione di banda.
Dall'approssimazione del segnale deriva un errore, che può essere definito in modi diversi, sempre in relazione alla media.
Tra essi il migliore modo è l'errore quadratico medio, $\mathcal{E}_{2a}$, definito come

$$\mathcal{E}_{2a}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - x_a(t)|^2 \, dt$$, energia dell'errore istantaneo

Sviluppando il quadrato e applicando il Teorema di Parseval si ottiene che l'energia dell'errore è $\mathcal{E}_{2a}^2$, funzione monotona decrescente:

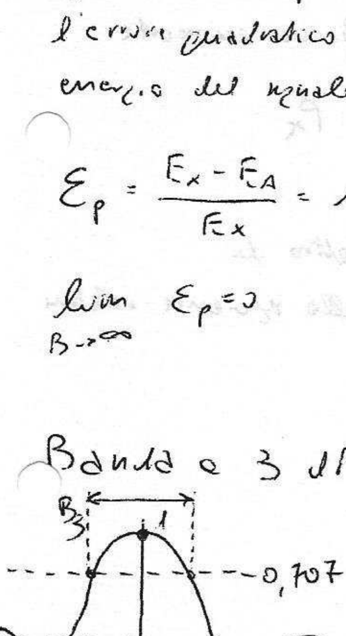
$$\mathcal{E}_{2a}^2 = E_x - E_a = \int_{-\infty}^{-B} |\underline{X}(f)|^2 \, df + \int_{B}^{\infty} |\underline{X}(f)|^2 \, df$$

In questa relazione, allargando B si riduce l'errore, ma questo dipende dall'ampiezza del segnale, per cui viene definito l'errore quadratico percentuale, normalizzando $\mathcal{E}_{2a}^2$ alla energia del segnale. Esso è $\mathcal{E}_p$:

$$\mathcal{E}_p = \frac{E_x - E_A}{E_x} = 1 - \frac{\int_{-B}^{B} |\underline{X}(f)|^2 \, df}{E_x}$$

$$\lim_{B \to \infty} \mathcal{E}_p = 0$$

Banda a 3 dB è l'intervallo di frequenze in cui l'ampiezza dello spettro non è inferiore a $0.707 = 1/\sqrt{2}$ volte il valore massimo



$B_3 = \frac{0.886}{\tau}$, proporzionalità all'inverso della durata dell'impulso.

12) Dare la definizione di correlazione tra segnali di potenza. Mostrare il legame con la potenza del segnale.

L.18 { Descrivere il legame tra potenza e spettro di potenza per segnali di potenza e presentare il teorema di Wiener.

La correlazione tra due segnali è il loro prodotto scalare, con uno dei due segnali traslato:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)\, Y(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, df$$

avendo $\int_{-\infty} x^*(t)\, y(t+\tau)\, dt = \int_{-\infty} \underbrace{X(f)\, Y(f)\, e^{j2\pi f\tau}}_{\text{convoluzione di due segnali}} df$

La correlazione tra segnali di potenza è

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{\Delta T \to \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} x^*(t)\, y(t+\tau)\, dt$$

Se i due segnali sono uguali, si parla di autocorrelazione, $R_{xx}(\tau)$. La potenza di un segnale di potenza, che non ammette trasformata di Fourier, è:

$$R_{xx}(0) = \lim_{\Delta T \to \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} |x(t)|^2\, dt = P_x$$

Per i segnali di potenza esiste lo spettro di densità di potenza, $S_{xx}(f)$, dato dalla seguente relazione che lo lega alla potenza:

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f)\, df$$

Per il teorema di Wiener gli segnali di potenza
abbiamo che lo spettro di densità di potenza $S_{xx}(f)$, è:

$$S_{xx}(f) = \lim_{\Delta f \to 0} \frac{P(f, f+\Delta f)}{\Delta f} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

Ovvero lo spettro di densità di potenza è la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione.
Si ha dunque una descrizione dell'andamento in frequenza dei segnali attraverso l'autocorrelazione del segnale, e non attraverso l'andamento del segnale.
Abbiamo dunque un unico strumento analitico, sia gli segnali di energia, sia di potenza.

$$R_{xx}(t) = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} x^*(\theta)\, x(t+\theta)\, d\theta$$

autocorrelazione di un segnale di potenza.

Per segnali di energia abbiamo
$S_{xx}(f)$ è lo spettro di densità di energia, legato all'energia da:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f)\, df$$

Inoltre l'autocorrelazione $R_{xx}(\tau)$ è:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f \tau}\, df \leftrightarrow E_x = R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\, df$$

l'autocorrelazione nell'origine è l'energia di un segnale di energia.

Per il teorema di Wiener, gli segnali di energia

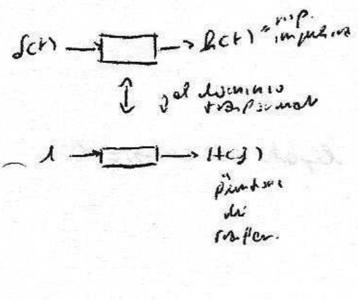
$$S_{xx}(f) = |X(f)|^2$$

PER CALCOLARE LO SPETTRO DI DENSITÀ DI ENERGIA DEL SEGNALE X(t) POSSO CALCOLARE $R_{xx}(\tau)$ E LA SUA T. DI F. oppure calcolare $|X(f)|^2$

13) Dare la definizione di risposta in frequenza di un sistema lineare e permanente.
Nel caso di un segnale di ingresso sinusoidale, scrivere l'espressione del segnale in uscita.

La risposta in frequenza di un sistema lineare e permanente è caratterizzata dalla risposta impulsiva, cioè dall'uscita del sistema quando in ingresso viene posto un impulso di Dirac.
La risposta in frequenza è in questo caso esplicitata dalla funzione di trasferimento $H(f)$, che è la trasformata di Fourier della risposta impulsiva, $h(t)$.

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$



Mandare un Dirac all'ingresso di un sistema stabile vuol dire andare ad eccitare tutte le possibili frequenze.
Questo perché il fatto che la trasformata dell'impulso di Dirac sia una costante pari a 1 significa eccitare tutte le frequenze nello stesso modo, per cui andiamo a vedere con questo segnale di eccitazione come risponde in frequenza, o risponde a ogni frequenza, il sistema.

IL SIGNIFICATO DELLA TRASFORMATA DI FOURIER E DELLA RISPOSTA IMPULSIVA, LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO, È QUELLO DI ANDARE A VEDERE COME RISPONDE, IN FREQUENZA IL SISTEMA.

Nel caso di un segnale sinusoidale in ingresso, abbiamo la seguente uscita

$$x(t) = \overset{\text{ampiezza}}{A} \cos(2\pi f_0 t + \overset{\text{fase}}{\psi})$$

$$y(t) = \underset{\text{ingresso}}{x(t)} \overset{\text{convoluzione}}{*} \underset{\text{risposta impulsiva}}{h(t)}$$

$$h(t) \text{ reale} \longleftrightarrow \underbrace{H(f) = \underset{\text{modulo}}{|H(f)|} e^{j\overset{}{\underset{\text{fase}}{\phi(f)}}}}_{\text{Trasf. di F. con modulo e fase}}$$

dunque

$$y(t) = |H(f_0)| \cos[2\pi f_0 t + \psi + \phi(f_0)]$$

L'uscita è una sinusoide con l'ampiezza modificata da $|H(f_0)|$, ovvero il modulo di $H(f_0)$, e la fase modificata dalla fase di $H(f)$.

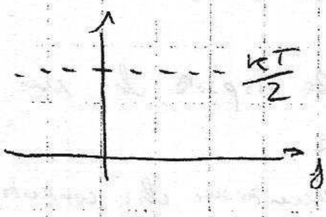
La funzione di trasferimento $H(f)$ è la risposta che un sistema ci dà ad ogni singola frequenza.
La funzione di trasferimento è la funzione che consente di valutare come si modificano ampiezza e fase di un segnale sinusoidale applicato all'ingresso di un circuito lineare, permanente e stabile

14) Presentare le caratteristiche del rumore bianco.

Il rumore bianco è un esempio di segnale caratterizzato da un certo spettro di densità di potenza.
È un segnale che ha uno spettro di densità costante, almeno nell'intervallo di frequenze che ci interessano e che sono quelle usate nelle radiocomunicazioni.
Esso è un segnale dovuto a correnti generate dal fatto di non operare allo zero assoluto.

$$S_{NN}(f) = \frac{kT}{2}$$, spettro di densità di potenza del rumore bianco

in cui
K è la costante di Boltzman $(1{,}38 \cdot 10^{-23}\ J/°K)$
T è la temperatura assoluta (°K)
$kT = -114\ \underline{dBm}\ / MHz$
unità logaritmica, rispetto 1 mW di potenza.

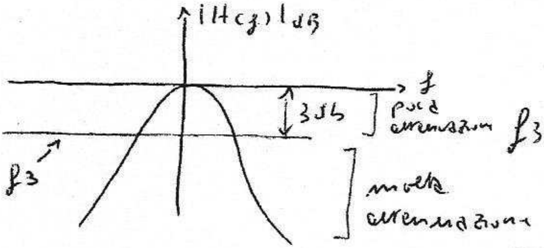


$$R_{NN}(t) = \frac{kT}{2}\,\delta(t)$$ (antitrasformata).
autocorrelazione

15) Discutere le differenze sull'asse delle frequenze tra i filtri passa-basso, passa-alto e passa-banda.

Filtrare i segnali significa selezionare un certo intervallo di frequenze, al fine di eliminare l'indesiderato e far rimanere il segnale utile.

In un filtro passa-basso le basse frequenze tendono ad essere poco attenuate, mentre quelle più grandi risultano essere molto più attenuate.

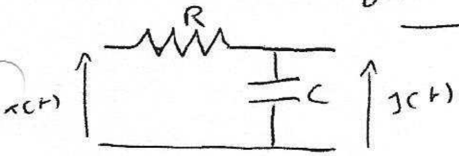


f_3 è la frequenza di taglio 3dB, quella in cui il quadrato del modulo della funzione di trasferimento si riduce alla metà del massimo valore assunto, quindi si impone $|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f_3 = \frac{1}{2\pi RC}$

È un parametro importante.

Altro parametro è la banda passante, che è la banda compresa tra 0 e f_3, il resto della banda è detta banda opaca.

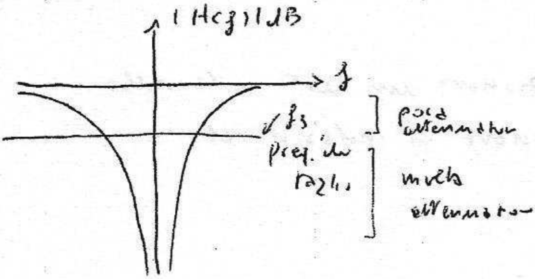
Il circuito che realizza questo è un circuito RC



$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi fRC)^2}}$$

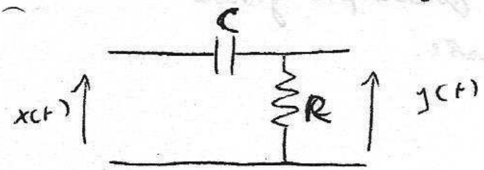
In un filtro passa-alto si ha il passaggio per frequenze alte e attenuazione per frequenze basse.



La banda passante è quella compresa tra f_3 e infinito. La banda opaca è quella compresa tra 0 e f_3.

$$f_3 = \frac{1}{2\pi RC}$$

Il circuito che realizza quanto sopra è:

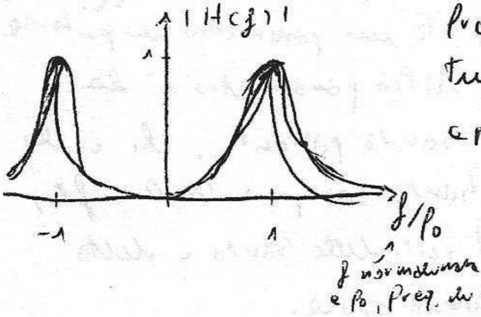


$$H(f) = \frac{j2\pi fRC}{1+j2\pi fRC}$$

$$|H(f)| = \frac{2\pi |f| RC}{\sqrt{1+(2\pi fRC)^2}}$$

In un filtro passa-banda quello che succede in frequenza è riportato di seguito, in cui sul parametro detto frequenza di risonanza $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

Tutto il segnale viene applicato sull'unità.

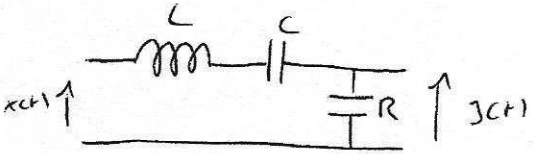


Nei filtri passa-banda si introducono due parametri, la frequenza di risonanza f_0 e il fattore di merito Q, da cui si ricava il valore di RC.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad Q = \frac{2\pi f_0 L}{R}$$

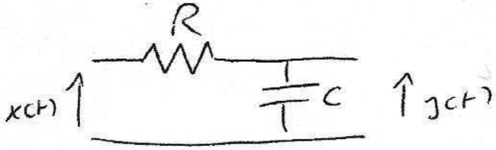
$$RC = \frac{1}{2\pi f_0 Q}$$

il circuito che realizza un filtro passa-banda è:



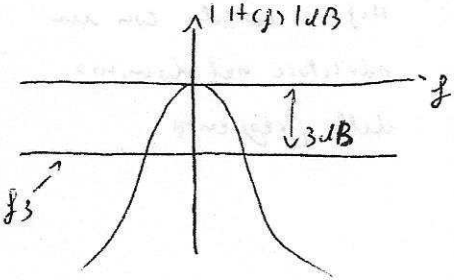
H(f) si calcola con un partitore nel dominio della frequenza.

16) Presentare la risposta in frequenza di un filtro passa-basso RC e disegnare approssimativamente il suo andamento sull'asse delle frequenze.

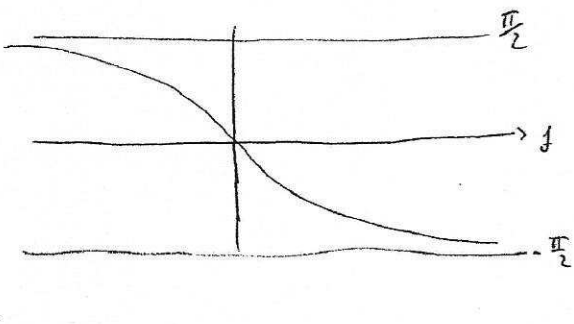


$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f RC}$$

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f RC)^2}}$$



$$\Phi_H(f) = \arctan(2\pi f RC)$$



17) Presentare il legame tra lo spettro di un segnale e lo spettro dello stesso segnale campionato. Discutere il problema dell'aliasing

Lo spettro del segnale campionato è la somma di infinite repliche, traslate, dello spettro del segnale non campionato opportunamente pesate; il peso è $1/T_c$

$$X_c(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_c} \left(f - \frac{m}{T_c} \right)$$

↳ Espressione della trasformata di Fourier del segnale campionato, T_c è il periodo di campionamento, $1/T_c$ è la freq. di camp., f_c

L'aliasing è il fenomeno secondo il quale le repliche spettrali si sovrappongono; è dunque un fenomeno di sovrapposizione, in quanto lo spettro è più grande e la banda si sovrappone parzialmente. Esistono cioè zone di frequenza dove il segnale campionato e il segnale di partenza non si sovrappongono.
Affinché sia possibile ritornare allo spettro del segnale originario da quello campionato, attraverso un'operazione di filtraggio passa basso ideale, occorre che non ci sia aliasing.
Affinché non ci sia aliasing occorre che la frequenza di campionamento sia almeno due volte la banda del segnale, e questo va sotto il nome di teorema del campionamento, secondo cui

$\frac{1}{f_c} = T_c \leq \frac{1}{2B}$ ovvero $f_c \geq 2B$ ovvero $B \leq \frac{1}{2T_c}$

18) Enunciare il teorema del campionamento per un segnale limitato alla banda B.

Per segnali limitati alla banda B (tali cioè che il loro spettro sia diverso da 0 solo nell'intervallo di frequenze -B, B) vale il seguente sviluppo

$$\underbrace{x(t)}_{\text{segnale}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{x(kT_c)}_{\text{campioni}} \underbrace{\text{sinc}}_{\text{funzioni interpolanti}} [2\pi \underbrace{B}_{\text{banda del segnale}} (t - k \underbrace{T_c}_{\text{intervallo di campionamento, periodo di campionamento}})]$$

con $T_c \leq \frac{1}{2B}$

ovvero, essendo $f_c = \frac{1}{T_c}$, $f_c \geq 2B$

I campioni del segnale, rilevati con una frequenza opportuna legata alla banda del segnale di ingresso, contengono tutta l'informazione contenuta nel segnale, che può essere ricostruito interpolandoli attraverso la funzione sinc $(2\pi B t)$, con $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Lezioni 25 - 30: Esercizi e Questionari

• Definisci la relazione tra numero di bit necessario per codificare un generico simbolo di un codice e il numero di elementi che costituisce il codice stesso. Calcola il numero di bit necessario per codificare un simbolo del codice ASCII.

Il numero di bit n necessario per codificare un generico simbolo di un codice di N elementi è $n = \log_2 N$.

Essendo N = 256 nel caso del codice ASCII, n = 8.

• Indicata con p_i la probabilità di emissione del simbolo i-esimo da parte di una sorgente di dati, definisci la quantità di informazione associata al medesimo simbolo i-esimo, quando l'unità di misura dell'informazione è il bit.

La misura della quantità di informazione è una funzione decrescente della probabilità. Minore è la probabilità del messaggio, maggiore è l'incertezza, e viceversa.

Detta q_i la quantità di informazione associata al simbolo i-esimo, abbiamo, nel caso del bit e quindi base 2 del logaritmo che q_i vale

$$q_i = \log_2 \frac{1}{p_i} = -\log_2 p_i$$

• Definisci analiticamente e concettualmente l'entropia H di una sorgente di dati. Calcola H per una sorgente di dati equiprobabili.

L'entropia H è una quantità globale che definisce la quantità media dell'informazione, definita come

$$H = E(q) = \sum_{i=1}^{N} p_i q_i = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 q_i$$

H misura l'informazione media della sorgente, espressa in bit/simbolo.

Se i simboli sono equiprobabili allora H ha valore massimo pari a n,

$$H = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \log_2 N = \log_2 N = n$$

H = n, con n numero di bit necessari alla rappresentazione di un simbolo.

Dunque l'entropia è massima, e vale n, se i simboli sono equiprobabili.

• Definisci numericamente la codifica PCM (Pulse Code Modulation) per un segnale audio canonico e deriva il valore della velocità di emissione di bit R_b.

La codifica PCM è la rappresentazione digitale di un segnale analogico, usata inizialmente per il segnale telefonico.

La conversione analogico/numerica di segnali audio (ma anche video) avviene in tre passi logici successivi: il campionamento, la quantizzazione (uniforme o non uniforme) e la codifica in forma binaria.

Nella codifica PCM per il segnale telefonico viene usata una banda B_x pari a 3,4 KHz, con una frequenza di campionamento f_c pari a 8 KHz.

B_x = 3,4 KHz

f_c = 8 KHz

Se la condizione $f_c \geq 2B_x$ non fosse rispettata si avrebbe un disturbo detto di aliasing che accompagna il segnale campionato. A tale scopo si fa precedre il campionatore da un filtro passa-basso che elimina le componenti per $f > f_c/2$, eliminando, di fatto, le componenti che danno luogo al disturbo.

Numericamente la codifica PCM ha i seguenti parametri:

B_x = 3,4 KHz

f_c = 8 KHz

M = 256 ⇨ n = 8, M sono il numero di livelli di codifica, n il num. di bit.

$R_b = f_c \cdot n$ = 64 Kbit/s

• Determina la velocità di emissione R_b per un segnale televisivo determinato da immagini aventi un numero di pixel pari a 414720, un numero medio di bit a pixel di 16 e una frequenza di ripetizione dell'immagine di 25.

I dati forniti sono relativi alla televisione numerica, con il numero N di pixel legato allo standard CCI R 601 Europa, in cui uno tra i vari formati indicati dallo standard è:

n_y = numero pixel verticali = 576

n_x = numero pixel orizzontali = 720

N = numero totale pixel = $n_y \cdot n_x$ = 414720

n_p = 16

f_i = 25

Il numero totale di bit per immagine è N_b, con

$N_b = n_x \cdot n_y \cdot n_p$, in cui n_p è il numero medio di bit/pixel che dipende dalla quantizzazione.

Dunque R_b [bit/s] = $N_b \cdot f_i = N \cdot n_p \cdot f_i$, in cui f_i è il numero di immagini per secondo, la frequenza di ripetizione di immagini per secondo, per cui, nel caso preso in esame abbiamo che R_b vale

R_b [bit/s] = 25 · 414720 · 16 = 165888000 bit/s ≈ 166 Mbit/s

• Definisci la codifica di sorgente: di cosa si tratta, a cosa serve, e quali sono gli eventuali vantaggi/svantaggi che essa comporta.

La codifica di sorgente è una operazione attraverso la quale si intende generare la stessa informazione con un numero inferiore di caratteri in modo da incrementare l'entropia con l'obiettivo ideale di raggiungere l'entropia massima, per la quale tutti i simboli sono equiprobabili ed indipendenti.

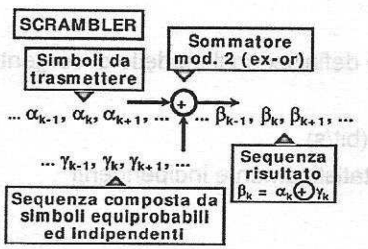
La codifica di sorgente produce messaggi con un numero minore di caratteri e con la stessa informazione ⇨ incremento di entropia H (rif. L. 30 pag. 8 appunti).

I flussi numerici risultanti tendono ad essere composti da simboli equiprobabili ed indipendenti.

Per garantire che la sequenza trasmessa sia in ogni caso costiuita da simboli equiprobabili ed indipendenti, essa viene sottoposta ad una operazione di "scrambling", rimescolamento.

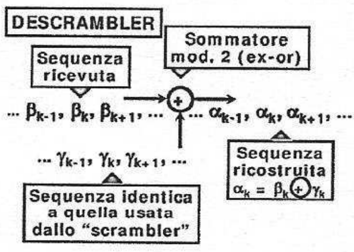
Nello scrambler i simboli da trasmettere vengono sommati in un sommatore modulo 2 (X-OR) con una sequenza composta da simboli equiprobabili ed indipendenti.

Dunque i simboli ai sono sommati modulo 2 α_i simboli casuali γ_i per ottenere una sequenza risultato $\beta_i = \alpha_i \oplus \gamma_i$.



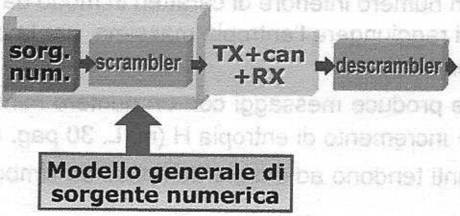
È possibile ricostruire la sequenza α a partire dalla sequenza β sommando modulo 2 la sequenza γ a β. questa è l'operazione di "descrambling".

In pratica $\beta_i \oplus \gamma_i = \alpha_i \oplus \gamma_i \oplus \gamma_i = \alpha_i \oplus$ "0" $= \alpha_i$.



La sequenza β è costituita da simboli equiprobabili e indipendenti a prescindere dalla statistica di α.

L'impiego dello scrambling porta al modello generale di sorgente numerica, che ha validità generale, quindi sia per sorgenti intrinsecamente numeriche, sia per sorgenti numeriche derivanti dalla conversione A/D di informazioni analogiche.



La sequenza di scrambling, γ, deve essere conosciuta da entrambe le parti, si usano sequenze pseudocasuali di massima lunghezza.
Per assicurare una certa segretezza, se la sequenza γ non è conosciuta, non si è in grado di ricostruire il messaggio e di conseguenza si perde informazione.

Si noti che, a differenza del codificatore di sorgente, lo scrambler mantiene inalterata la velocità.

Di seguito gli elementi che definiscono il modello di sorgente numerica:
- Numero n di bit/simbolo
- Velocità R_b di emissione (bit/s)
- Simboli equiprobabili e statisticamente indipendenti

□

Esame Viareggio del 27.10.2016

1) Discutere analiticamente la Trasformata della derivata di un segnale, di $y(t) = x'(t)$

2) Calcolare la Trasformata di Fourier di:

- $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$
- $x(t) = rect(t) * \cos(2\pi f_0)$

3) Discutere analiticamente dell'impulso di Dirac e della proprietà campionatrice

4) Discutere dello spettro del segnale e del segnale campionato
Discutere del problema dell'aliasing.

COMUNICAZIONI ELETTRICHE

Esame del 15.03.2016 Viareggio

1. Spiegare il principio di dualità e calcolare la trasformata di Fourier di

$x(t) = AB \, \text{sinc}(\pi B t)$ al questionario 10.1

2. Calcolare la trasformata di Fourier di

$x(t) = \text{rect}_T(t - t_0)$ rettangolo di ~~ampiezza~~ durata T traslato in t_0

$x(t) = \cos(2\pi f t)$

3. Entropia H: spiegare cosa è e come si calcola per una sorgente di dati ~~esempio e sistemi~~ equiprobabili. Stesso questionario di esercizi Lez. 25-30, 30.1

4. Cosa succede nell'asse delle frequenze nel caso di filtro passa-basso, passa-alto e passa-banda.

• 1. PRINCIPIO di DUALITÀ Lez. 8, pag 5 appunti

Il principio di dualità stabilisce che
se $x(t) \leftrightarrow X(f)$
allora $X(t) \leftrightarrow x(-f)$

Cioè se $X(f)$ è la trasformata di Fourier del segnale $x(t)$, allora $X(t)$, che è il segnale temporale ottenuto scambiando la frequenza con il tempo, ha per trasformata, quindi in frequenza, il segnale $x(-f)$, quindi con l'asse delle frequenze rovesciato.

In pratica il principio di dualità risponde alla domanda: se $X(f)$ indica la trasformata di $x(t)$, quale è la trasformata del segnale $X(t)$, avente cioè lo stesso andamento temporale originariamente posseduto in ambito frequenziale dalla trasformata di $x(t)$? La risposta è che se

$$x(t) \longleftrightarrow X(f)$$

allora $X(t) \longleftrightarrow x(-f)$

Questo si dimostra considerando della relazione tra $x(t)$ e la sua trasformata, in sostanza il calcolo dell'antitrasformata,

Poi si scambiano formalmente le variabili t ed f e poi si sostituisce f con -f.
In sostanza

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

Si scambiano le variabili t ed f e si ottiene

$$x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\, e^{j2\pi t f}\, dt$$ → uguale a $-j2\pi t(-f)$

Si sostituisce f con -f, e si ottiene

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

Dunque, dato $x(t) = AB\ \mathrm{sinc}(\pi B t)$,
per calcolarne la trasformata $X(f)$ per mezzo dell'integrale sarebbe un calcolo complesso,

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} AB\ \mathrm{sinc}(\pi B t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt,$$

con $\mathrm{sinc}(\pi B t) = \dfrac{\sin(\pi B t)}{\pi B t}$

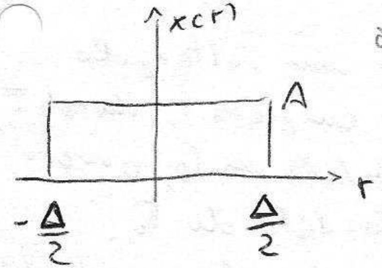
Il principio di dualità ci viene incontro in quanto un impulso rettangolare di ampiezza A, centrato in Δ ha per trasformata di Fourier $A\Delta \, \mathrm{sinc}(\pi f \Delta)$.

Cioè

$\cancel{x(t) \leftrightarrow A\, \mathrm{rect}_\Delta}$

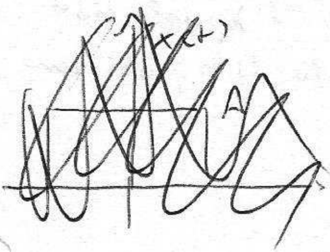
$$x(t) = \underbrace{A}_{\text{ampiezza}} \, \mathrm{rect}_{\underbrace{\Delta}_{\text{durata}}} \underbrace{(t)}_{\text{centrato in } t=0}$$

$$X(f) = \underbrace{A}_{\text{ampiezza}} \underbrace{\Delta}_{\text{durata, nel tempo}} \, \mathrm{sinc}(\pi f \Delta)$$



Dunque per il principio di dualità

$$x(t) = \underbrace{AB}_{\substack{\text{nel tempo} \\ \text{questa è l'ampiezza}}} \, \mathrm{sinc}(\pi B t) \leftrightarrow X(f) = \underbrace{A}_{\text{ampiezza}} \, \mathrm{rect}_{\underbrace{B}_{\text{durata, nel tempo}}}(f)$$



FINE es 1

• Esercizio 2. Calcolare la Trasformata di Fourier di

1. $x(t) = rect_T(t - t_0)$ rettangolo di ampiezza 1, durata T, traslato in t_0

2. $x(t) = \cos(2\pi f t)$

vd. Lez. 9, pag 1 appunti

1. $\boxed{x(t) = rect_T(t - t_0)}$ è un rettangolo di ampiezza 1, durata T, traslato in t_0, ovvero ritardato di t_0

La trasformata del segnale x(t) che è ritardato di t_0, si ottiene moltiplicando la trasformata del segnale non ritardato per un fattore che tiene conto del ritardo, pari in questo caso a $e^{-j2\pi f t_0}$

Quindi se $y(t) = rect_T(t)$ è il segnale non ritardato, abbiamo

$$X(f) = e^{-j2\pi f t_0} \cdot Y(f)$$

con $Y(f) = 1 \cdot T \operatorname{sinc}(\pi f T)$

ampiezza, valore della durata

valore della durata, quindi in pratica

Quindi $X(f) = e^{-j2\pi f t_0} \cdot T \operatorname{sinc}(\pi f T)$

2. $\boxed{x(t) = \cos(2\pi f t)}$ Vd. Lez. 8 pag. 4 appunti

che sarebbe una modulazione prodotto, del coseno per 1.

sarebbe la freq portante, f_0

Per calcolare la $X(f)$, la trasformata di Fourier della $x(t)$ si applica la proprietà del ritardo e della traslazione in frequenza al coseno espresso con le formule di Eulero.

Abbiamo che $\delta(t) \leftrightarrow 1$ e $1 \leftrightarrow \delta(f)$, da cui otteniamo immediatamente che

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0}$$

$$e^{j2\pi f_0 t} = 1 \cdot e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \delta(f - f_0)$$

Quindi, dato

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi f_0 t}, \text{ da cui}$$

$$\updownarrow$$

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$

• ~~Esse~~ Domanda 3: Spiegare cosa è l'$\boxed{\text{Entropia } H}$ e come si ~~applica a sistemi~~ calcola per una sistema di dati equiprobabili (vd. Lez. 25 pag. 7)

L'ENTROPIA H È UNA QUANTITÀ GLOBALE CHE DEFINISCE LA QUANTITÀ MEDIA DELL'INFORMAZIONE; ESSA È DEFINITA COME

$$H = E(q) = \sum_{i=1}^{N} p_i q_i = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 q_i$$

H MISURA L'INFORMAZIONE MEDIA DELLA SORGENTE, ESPRESSA IN bit/simbolo.
SE I SIMBOLI SONO EQUIPROBABILI ALLORA H HA UN VALORE MASSIMO PARI A n, H = n, in cui (vd. relazione) n È IL NUMERO DI BIT NECESSARI ALLA RAPPRESENTAZIONE DI UN SIMBOLO.
DUNQUE L'ENTROPIA H È MASSIMA E HA UN VALORE PARI A n SE I SIMBOLI SONO EQUIPROBABILI.

PER AUMENTARE L'ENTROPIA NELLE COMUNICAZIONI SI USA LA CODIFICA DI SORGENTE, CHE È UNA OPERAZIONE ATTRAVERSO LA QUALE SI INTENDE GENERARE LA STESSA INFORMAZIONE CON UN NUMERO INFERIORE DI CARATTERI: LA CODIFICA DI SORGENTE PRODUCE MESSAGGI CON UN NUMERO MINORE DI CARATTERI E CON LA STESSA INFORMAZIONE.

IL CALCOLO di H, SE I SIMBOLI SONO EQUIPROBABILI, È:

$$H = -\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N} \log_2 \frac{1}{N} = \log_2 N = n$$

L'ENTROPIA H È MASSIMA ($H = n$) SE I SIMBOLI SONO EQUIPROBABILI.

$$H \leq \log_2 N = n$$

Si DIMOSTRA CHE H È MASSIMA SE I SIMBOLI SONO INDIPENDENTI.

(4.) Cosa succede sull'asse delle frequenze nel caso di filtri passa-basso, passa-alto e passa-banda. Vd. Lez. "15*", di cui non c'è la nuova lez. nell'ordine, in quanto la 15 è il campionamento!

IL FILTRAGGIO DEI SEGNALI SERVE PER SEPARARE IL SEGNALE UTILE DA ALTRI SEGNALI, AD ESEMPIO QUELLI PROVENIENTI DA ALTRE STAZIONI TRASMITTENTI, DISTURBI, IL RUMORE TERMICO DELLE APPARECCHIATURE ecc.
I SEGNALI RICEVUTI POSSONO NON ESSERE CONOSCIUTI IN TEMPO, MA SE NE CONOSCE IL COMPORTAMENTO IN FREQUENZA.

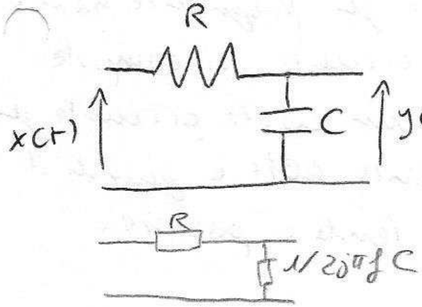
QUESTO VALE GRAZIE ALLA RELAZIONE
$R_{yy}(f) = R_{xx}(f) * R_{hh}(f)$
E, GRAZIE ALLA RELAZIONE IN MERITO ALLO SPETTRO DI DENSITA' $S_{yy}(f)$, di potenza o di energia, dell'uscita:
$$S_{yy}(f) = S_{xx}(f)\, |H(f)|^2$$

Il modulo di $H(f)$ cioè $|H(f)|^2$, deve assumere valori alti nella banda di frequenze occupata dal segnale utile e valori bassi altrove e questo perché per separare il segnale utile dagli altri, occorre far passare il segnale ricevuto attraverso un filtro con funzione di trasferimento $H(f)$

QUINDI SAGOMANDO OPPORTUNAMENTE LA RISPOSTA IN FREQUENZA POSSIAMO SELEZIONARE CERTI INTERVALLI DI FREQUENZA DA ALTRE PER CUI È POSSIBILE SELEZIONARE CERTI SEGNALI.
Un esempio è quello del problema della sintonia di canali TV, ricevuti da un'antenna; il ricevitore opera una selezione di un intervallo di frequenze, fra tutte quelle che contengono i canali ricevuti.

- I filtri passa-basso fanno passare le basse frequenze, rigettando le altre.
- I filtri passa-alto fanno passare le alte frequenze, rigettando le altre.
- I filtri passa-banda fanno passare un certo intervallo di frequenze.

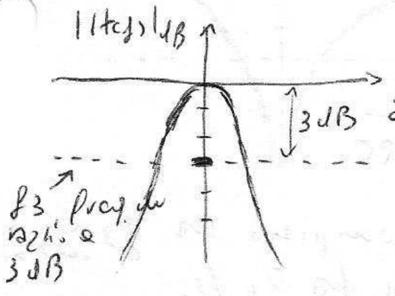
Per i filtri passa-basso, i più semplici dei quali sono realizzabili con un circuito RC, le basse frequenze tendono ad essere attenuate poco, mentre le frequenze più grandi rischiano essere molto attenuate.



$$H(f) = \frac{\frac{1}{j2\pi f C}}{R + \frac{1}{j2\pi f C}} \Longrightarrow H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f RC}$$

La funzione di trasferimento $H(f) = \frac{1}{1+j2\pi f RC}$, calcolata con un partitore

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f RC)^2}}$$



I parametri rilevanti sono la frequenza di taglio a 3 dB, f_3, e la banda passante.

La frequenza di taglio è la frequenza dove il quadrato del modulo della funzione di trasferimento si riduce alla metà del massimo valore assunto. In pratica la frequenza di taglio

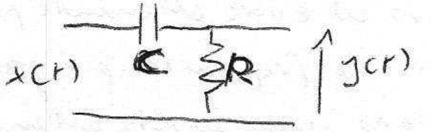
f_3 è calcolata imponendo che $|H(f_3)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Nel circuito RC, $f_3 = 1/2\pi RC$.

La banda passante è, per il filtro passa-basso, la banda compresa fra 0 e f_3.

La banda che va da f_3 a infinito è detta banda opaca.

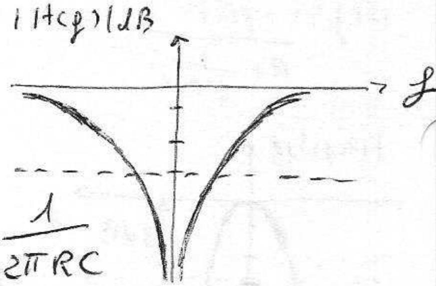
Nel filtro passa-alto si ha il passaggio per frequenze alte e attenuazione per frequenze basse.
Il condensatore, nel relativo circuito, si comporta



come un corto circuito per frequenze alte e quindi il segnale tende a passare.

$$H(f) = \frac{j2\pi f RC}{1 + j2\pi f RC}$$

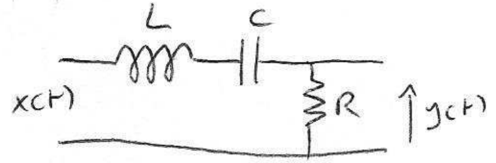
$$|H(f)| = \frac{2\pi |f| RC}{\sqrt{1 + (2\pi f RC)^2}}$$

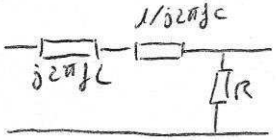


La frequenza di taglio $f_3 = \frac{1}{2\pi RC}$

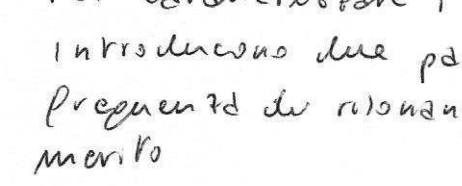
La banda passante è quella compresa tra f_3 e infinito.
La banda opaca è quella compresa fra 0 e f_3.

Filtri passa-banda, fanno passare un intervallo di frequenze





Per caratterizzare i filtri passa-banda si introducono due parametri, f_0 che è la frequenza di risonanza, Q che è il fattore di merito



Sulla frequenza di risonanza è come avere un corto circuito sulla linea in serie induttore e condensatore.
Sulla frequenza di risonanza f_0 tutto il segnale viene applicato sull'uscita.

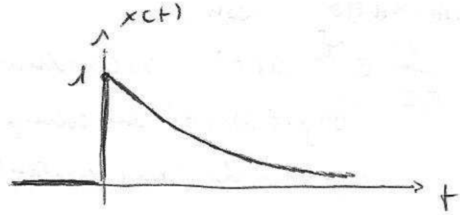
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{2\pi f_0 L}{R}$$

da cui si ricava $RC = \frac{1}{2\pi f_0 Q}$

Esempi da lez. 7 - La Trasformata di Fourier

1. Calcolo della T.d.F. di $\boxed{x(t) = e^{-at}\, u(t), \quad a > 0}$



gradino unitario $u(t)$:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrove}, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

IL SEGNALE AMMETTE LA TDF IN QUANTO

$\int_0^\infty e^{-at}\, dt = \frac{1}{a}$, quindi $< \infty$

UNA SECONDA POSSIBILITÀ ERA VERIFICARE CHE L'INTEGRALE DEL QUADRATO DEL SEGNALE FOSSE FINITO; INFATTI

$\int_0^\infty e^{-2at}\, dt = \frac{1}{2a}$

L'integrale da calcolare per ottenere $X(f)$ è:

$$\int_0^\infty e^{-at} \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-(a + j2\pi f)t}\, dt$$

Facendo l'integrale per sostituzione, con

$s = (a + j2\pi f)t \Rightarrow ds = (a + j2\pi f)\, dt \Rightarrow dt = \frac{ds}{a + j2\pi f}$

occorre dividere per $a + j2\pi f$, ottenendo

$$\frac{1}{a + j2\pi f} \int_0^\infty e^{-s}\, ds = \frac{1}{a + j2\pi f} \cdot \left(-e^{-s}\right)\Big|_0^\infty =$$

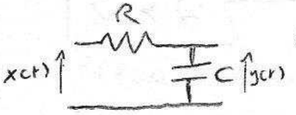
$$= \frac{1}{a + j2\pi f} \cdot \left(-\frac{1}{e^s}\right)\Big|_0^\infty = \frac{1}{a + j2\pi f}\left(-0 + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{a + j2\pi f}, \text{ quindi}$$

$$x(t) = e^{-at}\, u(t), \ a > 0 \longleftrightarrow X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

che è una delle T.d.F. fondamentali.

Questo segnale corrisponde alla risposta impulsiva di un circuito RC passa-basso, che è un semplice filtro passa-basso, con

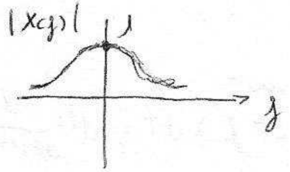


$x(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$, riconducibile alla espressione di esempio, a meno di una costante.

Il modulo della trasformata di Fourier, essendo ~~dunque~~ valida la ~~relazione~~ proprietà

$z = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow |z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, e $|\cdot| = \sqrt{Re^2 + Im^2}$, è

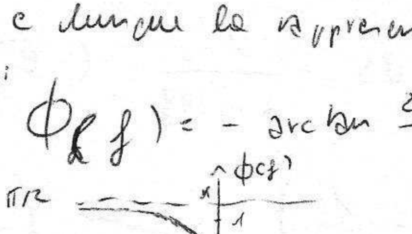
$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (2\pi f)^2}}$$, che è, SEMPRE, una funzione pari



che è lo spettro di densità di ampiezza, o semplicemente, ma inesatto, spettro di ampiezza

La fase, e dunque la rappresentazione dello spettro di fase è:

$$\phi(f) = -\arctan\frac{2\pi f}{a}$$, funzione, SEMPRE, dispari



note sul calcolo di $\angle X(f) = \phi(f) = \theta$

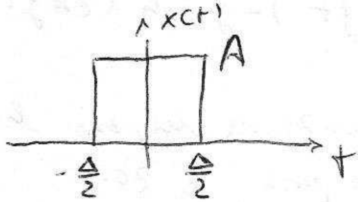
il complesso $\hookrightarrow \frac{1}{a + j2\pi f} = \frac{a - j2\pi f}{\underbrace{a^2 + 4\pi^2 f^2}_{=k}} = ak - jk2\pi f$, con $k = a^2 + 4\pi^2 f^2$

$\angle_\circ = \frac{b}{a} = \arctan\left(-\frac{k2\pi f}{ka}\right) = \arctan -\frac{2\pi f}{a} = -\arctan\frac{2\pi f}{a}$,

poiché vale la proprietà $\arctan(x) = -\arctan(-x)$ ovvero $\arctan(-x) = -\arctan(x)$.

Esempio 2. Calcolare la Trasf. di Fourier del segnale
da lez. 7

$\boxed{x(t) = A\,\mathrm{rect}_\Delta(t)}$, ovvero un impulso rettangolare di ampiezza A, durata Δ, centrato in $t=0$.



La trasformata di Fourier di $x(t)$ è $X(f)$, calcolata, come da definizione, come:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

L'impulso rettangolare individua un intervallo da $-\Delta/2$ a $\Delta/2$: in questo intervallo $x(t)=A$, costante, al di fuori $x(t)=0$, quindi l'integrale sopra è nullo per intervalli esterni all'intervallo $[-\Delta/2, \Delta/2]$ e non nullo nell'intervallo, e, poiché $x(t)=A$, possiamo scrivere

$$X(f) = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \underbrace{A}_{x(t)\text{ in }[-\Delta/2,\,\Delta/2]} \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt$$

Devono essere fatte due considerazioni: una è quella di integrare da 0 a $\Delta/2$, moltiplicando per 2, e una è quella di trasformare secondo le

Formula di Eulero l'esponenziale -

Quindi, poiché $e^{-jx} = \cos x - j \sin x$

abbiamo che

$$e^{-j2\pi f t} = \cos(2\pi f t) - j \sin(2\pi f t).$$

La funzione seno è una funzione dispari che, se integrata su un intervallo pari, è zero.

Dunque abbiamo che

$$X(f) = 2A \int_0^{\Delta/2} \cos(2\pi f t)\, dt =$$

$$= \cancel{2}A \cdot \frac{1}{\cancel{2}\pi f} \cdot \operatorname{sen}(2\pi f t)\Big|_0^{\Delta/2} =$$

$$= \frac{A}{\pi f} \cdot \operatorname{sen}\left(\cancel{2}\pi f \cdot \frac{\Delta}{\cancel{2}}\right) = \frac{A}{\pi f} \operatorname{sen}(\pi f \Delta) =$$

$$= \frac{\Delta}{\Delta} \cdot \frac{A}{\pi f} \operatorname{sen}(\pi f \Delta) = \Delta A \operatorname{sinc}(\pi f \Delta)$$

" $= \operatorname{sinc}(\pi f \Delta)$ per definizione, "

infatti $\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \operatorname{sinc}(x)$

Poiché $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow$ per $f=0$ il valore dell'area della funzione è ΔA, che sarebbe l'area del segnale

(modulo e fase ... vd appunti Lez. 7 pag 5)

FORMULARIO di TRIGONOMETRIA

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad -1 \leq \sin x \leq 1 \qquad -1 \leq \cos x \leq 1 \qquad \forall\, x \in \mathbf{R};$$

$\sin 0 = 0$	$\sin \frac{\pi}{2} = 1$	$\sin \pi = 0$	$\sin \frac{3}{2}\pi = -1$	$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos 0 = 1$	$\cos \frac{\pi}{2} = 0$	$\cos \pi = -1$	$\cos \frac{3}{2}\pi = 0$	$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

seno è funzione **dispari**: $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \quad \forall\, x \in \mathbf{R}$;

coseno è funzione **pari**: $\cos(-x) = \cos x \quad \forall\, x \in \mathbf{R}$.

$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$	$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$	$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$

Formule di addizione e sottrazione

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\, \cos\beta \pm \cos\alpha\, \sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\, \cos\beta \mp \sin\alpha\, \sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\, \tan\beta}$$

Formule di duplicazione

$$\sin(2x) = 2\, \sin x\, \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\, \sin^2 x = 2\, \cos^2 x - 1$$

dalla precedente si ottiene:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2\,x)}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2\,x)}{2}$$

Formule di prostaferesi

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\, \sin\left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\, \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\, \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Formule di Werner

$$\sin\alpha\, \sin\beta = \frac{1}{2}\, [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos\alpha\, \cos\beta = \frac{1}{2}\, [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin\alpha\, \cos\beta = \frac{1}{2}\, [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

Formule parametriche

Posto $t = \tan \frac{x}{2}$ si ha:

$$\sin x = \frac{2\,t}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\tan x = \frac{2\,t}{1 - t^2}$$

Formule di bisezione

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad x \in (0, 2\,\pi)$$

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

$$\tan \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}, \quad x \in (0, \pi)$$

Pormulario_tdls.pdf

Formule di Teoria dei Segnali

L.Verdoliva

Formule di trigonometria

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \\
\cos^2\alpha &= \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \\
\sin^2\alpha &= \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \\
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)] \\
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)] \\
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]
\end{aligned}
$$

Formule di Eulero

$$
\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2} \qquad \sin\alpha = \frac{e^{j\alpha}-e^{-j\alpha}}{2j} \qquad e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha
$$

Proprietà $\delta(t)$ e $\delta(n)$

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\delta(t)\,dt = \begin{cases} x(0) & 0 \in (t_1,t_2) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$$

$$x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\delta(t-\alpha)\,d\alpha = x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau = \mathrm{u}(t) \quad \leftrightarrow \quad \delta(t) = \frac{d\mathrm{u}(t)}{dt}$$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(n-k) = 1$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\delta(n-n_0) = x(n_0)$$

$$x(n)\,\delta(n-n_0) = x(n_0)\,\delta(n-n_0)$$

$$\delta(n) = \delta(-n)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k) = x(n) * \delta(n) = x(n)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k) = \mathrm{u}(n) \quad \leftrightarrow \quad \delta(n) = \mathrm{u}(n) - \mathrm{u}(n-1)$$

Formule di utilità

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \qquad |\alpha| < 1 \qquad\qquad \sum_{n=M}^{N} \alpha^n = \begin{cases} \frac{\alpha^M - \alpha^{N+1}}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \\ N - M + 1 & \alpha = 1 \end{cases}$$

Media temporale per segnali aperiodici (1) e per segnali periodici (2)

$$(1) \qquad < x(t) > \; = \; \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt \qquad\qquad < x(n) > = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)$$

$$(2) \qquad < x(t) > \; = \; \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, dt \qquad\qquad < x(n) > \; = \; \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x(n)$$

a) *Invarianza temporale* $\quad y(t) = x(t - t_0) \quad \Longrightarrow \quad < y(t) > = < x(t) >$

$\qquad y(n) = x(n - n_0) \quad \Longrightarrow \quad < y(n) > = < x(n) >$

b) *Linearità* $\quad z(\cdot) = a\, x(\cdot) + b\, y(\cdot) \quad \Longrightarrow \quad < z(\cdot) > = a < x(\cdot) > + b < y(\cdot) >$

Potenza per segnali aperiodici (1) e per segnali periodici (2) ed Energia (3)

$$(1) \qquad P_x \; = \; \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\, dt \qquad\qquad P_x \; = \; \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

$$(2) \qquad P_x \; = \; \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2\, dt \qquad\qquad P_x \; = \; \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} |x(n)|^2$$

$$(3) \qquad E_x \; = \; \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt \qquad\qquad E_x \; = \; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

Potenza ed Energia mutua

$$P_{xy} \; = \; \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, y^*(t)\, dt \qquad\qquad P_{xy} \; = \; \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x(n)\, y^*(n)$$

$$E_{xy} \; = \; \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y^*(t)\, dt \qquad\qquad E_{xy} \; = \; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, y^*(n)$$

a) *Invarianza temporale* $y(t) = x(t - t_0) \implies P_y = P_x$ e $E_y = E_x$

$y(n) = x(n - n_0) \implies P_y = P_x$ e $E_y = E_x$

b) *Non Linearità* $z(\cdot) = x(\cdot) + y(\cdot) \implies P_z = P_x + P_y + 2\,\mathrm{Re}[P_{xy}]$

$\implies E_z = E_x + E_y + 2\,\mathrm{Re}[E_{xy}]$

<u>Funzione di autocorrelazione</u> per segnali di potenza aperiodici (1) e periodici (2) e per segnali di energia (3)

$$(1)\quad R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,x^*(t-\tau)\,dt \qquad R_x(m) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x(n)\,x^*(n-m)$$

$$(2)\quad R_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,x^*(t-\tau)\,dt \qquad R_x(m) = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x(n)\,x^*(n-m)$$

$$(3)\quad R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,x^*(t-\tau)\,dt \qquad R_x(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\,x^*(n-m)$$

<u>Funzione di mutua correlazione</u> per segnali di potenza (1) e per segnali di energia (2)

$$(1)\quad R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,y^*(t-\tau)\,dt \qquad R_{xy}(m) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} x(n)\,y^*(n-m)$$

$$(2)\quad R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,y^*(t-\tau)\,dt \qquad R_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\,y^*(n-m)$$

a) *Valore nell'origine* $R_x(0) = \begin{cases} E_x \\ P_x \end{cases}$ $\qquad R_{xy}(0) = \begin{cases} E_{xy} \\ P_{xy} \end{cases}$

b) *Simmetria coniugata* $R_x(\cdot) = R_x^*(-(\cdot))$ $\qquad R_{xy}(\cdot) = R_{yx}^*(-(\cdot))$

c) *Limitatezza* $|R_x(\cdot)| \le R_x(0)$ $\qquad |R_{xy}(\cdot)| \le \begin{cases} \sqrt{E_x E_y} \\ \sqrt{P_x P_y} \end{cases}$

<u>Sistemi LTI nel dominio del tempo</u>

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\,h(t-\alpha)\,d\alpha = x(t) * h(t) \qquad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\,h(n-k) = x(n) * h(n)$$

a) *Proprietà commutativa* $x(\cdot) * h(\cdot) = h(\cdot) * x(\cdot)$

b) *Proprietà distributiva* $x(\cdot) * [h_1(\cdot) + h_2(\cdot)] = x(\cdot) * h_1(\cdot) + x(\cdot) * h_2(\cdot)$

c) *Proprietà associativa* $x(\cdot) * [h_1(\cdot) * h_2(\cdot)] = [x(\cdot) * h_1(\cdot)] * h_2(\cdot)$

d) *Proprietà associativa mista* $a[x(\cdot) * h(\cdot)] = [ax(\cdot)] * h(\cdot) = x(\cdot) * [ah(\cdot)]$

e) *Invarianza temporale* $x(t - t_1) * h(t - t_2) = y(t - (t_1 + t_2))$

$x(n - n_1) * h(n - n_2) = y(n - (n_1 + n_2))$

Sistema non dispersivo $\Longleftrightarrow$ $h(\cdot) = k\delta(\cdot)$

Sistema causale $\Longleftrightarrow$ $h(t) = 0$ per $t < 0$ $\quad h(n) = 0$ per $n < 0$

Sistema stabile $\Longleftrightarrow$ $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < \infty$ $\quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$

Serie di Fourier

Sintesi $$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k\, e^{j2\pi k f_0 t} \qquad x(n) = \sum_{k=0}^{N_0-1} X_k\, e^{j2\pi k \nu_0 n}$$

Analisi $$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t} dt \qquad X_k = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x(n)\, e^{-j2\pi k \nu_0 n}$$

$$x(\cdot) \text{ reale} \longrightarrow X_{-k} = X_k^* \longleftrightarrow \begin{cases} |X_{-k}| = |X_k| \\ \angle X_{-k} = -\angle X_k \end{cases}$$

1) *Linearità* $z(\cdot) = ax(\cdot) + by(\cdot) \longleftrightarrow Z_k = aX_k + bY_k$

2) *Traslazione temporale* $y(t) = x(t - t_0) \longleftrightarrow Y_k = X_k\, e^{-j2\pi k f_0 t_0}$

$y(n) = x(n - n_0) \longleftrightarrow Y_k = X_k\, e^{-j2\pi k \nu_0 n_0}$

3) *Riflessione* $y(\cdot) = x(-\cdot) \longleftrightarrow Y_k = X_{-k}$

4) *Derivazione* $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow Y_k = j2\pi k f_0 X_k$

5) *Differenza prima* $y(n) = x(n) - x(n-1) \longleftrightarrow Y_k = (1 - e^{-j2\pi k \nu_0})X_k$

6) *Relazione di Parseval*

$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$ $\qquad \frac{1}{N_0}\sum_{<N_0>} |x(n)|^2 = \sum_{k=<N_0>} |X_k|^2$

Trasformata di Fourier

$$\textit{Sintesi} \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi ft}\, df \qquad\qquad x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\nu)\, e^{j2\pi\nu n}\, d\nu$$

$$\textit{Analisi} \quad X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \qquad\qquad X(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{-j2\pi\nu n}$$

$$x(\cdot) \text{ reale} \longrightarrow X(-(\cdot)) = X^*(\cdot) \longleftrightarrow \begin{cases} |X(-(\cdot))| = |X(\cdot)| \\ \angle X(-(\cdot)) = -\angle X(\cdot) \end{cases}$$

1) *Linearità*	$a_1x_1(\cdot) + a_2x_2(\cdot)$	$\longleftrightarrow$	$a_1X_1(\cdot) + a_2X_2(\cdot)$
2) *Riflessione*	$x(-(\cdot))$	$\longleftrightarrow$	$X(-(\cdot))$
3) *Cambiamento di scala*	$x(at)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$
4) *Espansione*	$x\left[\frac{n}{M}\right]$	$\longleftrightarrow$	$X(M\nu)$
5) *Decimazione*	$x(Mn)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X\left(\frac{\nu-k}{M}\right)$
6) *Convoluzione*	$x(\cdot) * y(\cdot)$	$\longleftrightarrow$	$X(\cdot)Y(\cdot)$
7) *Prodotto*	$x(t)y(t)$	$\longleftrightarrow$	$X(f) * Y(f)$
	$x(n)y(n)$	$\longleftrightarrow$	$X(\nu) * Y(\nu) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(u)Y(\nu - u)\, du$
8) *Derivazione d.d.t*	$\frac{d^kx(t)}{dt^k}$	$\longleftrightarrow$	$(j2\pi f)^kX(f)$
9) *Differenza prima*	$x(n) - x(n-1)$	$\longleftrightarrow$	$(1 - e^{-j2\pi\nu})X(\nu)$
10) *Derivazione d.d.f*	$t^kx(t)$	$\longleftrightarrow$	$\left(\frac{j}{2\pi}\right)^k \frac{d^kX(f)}{df^k}$
11) *Integrazione*	$\int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\, d\alpha$	$\longleftrightarrow$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)$
12) *Somma corrente*	$\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{X(\nu)}{1-e^{-j2\pi\nu}} + \frac{1}{2}X(0)\tilde{\delta}(\nu)$
13) *Traslazione d.d.t*	$x(t - t_0)$	$\longleftrightarrow$	$X(f)\, e^{-j2\pi f t_0}$
	$x(n - n_0)$	$\longleftrightarrow$	$X(\nu)\, e^{-j2\pi\nu n_0}$
14) *Traslazione d.d.f*	$x(t)\, e^{j2\pi f_0 t}$	$\longleftrightarrow$	$X(f - f_0)$
	$x(n)\, e^{j2\pi\nu_0 n}$	$\longleftrightarrow$	$X(\nu - \nu_0)$

15) *Modulazione*	$x(t)\cos(2\pi f_0 t+\theta)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{2}X(f-f_0)e^{j\theta}+\frac{1}{2}X(f+f_0)e^{-j\theta}$
	$x(t)\cos(2\pi\nu_0 n+\theta)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{2}X(\nu-\nu_0)e^{j\theta}+\frac{1}{2}X(\nu+\nu_0)e^{-j\theta}$
16) *Campionamento d.d.f*	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-nT)$	$\longleftrightarrow$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}X\left(\frac{k}{T}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$
	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-kn)$	$\longleftrightarrow$	$\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{N}X\left(\frac{k}{N}\right)\tilde{\delta}\left(f-\frac{k}{N}\right)$
17) *Campionamento d.d.t*	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t-nT)$	$\longleftrightarrow$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}X\left(f-\frac{k}{T}\right)$
	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kN)\delta(n-kN)$	$\longleftrightarrow$	$\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{N}X\left(f-\frac{k}{N}\right)$
18) *Valore nell'origine*	$X(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,dt$		$x(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(f)\,df$
	$X(0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)$		$x(0)=\int_{-1/2}^{+1/2}X(\nu)\,d\nu$

19) *Relazione di Parseval*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|X(f)|^2\,df \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)|^2=\int_{-1/2}^{+1/2}|X(\nu)|^2\,d\nu$$

<u>Trasformate notevoli</u> (segnali tempo continuo)

1) *Impulso rettangolare*	$A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$\longleftrightarrow$	$AT\,\mathrm{sinc}(fT)$
2) *Impulso triangolare*	$A\,\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$	$\longleftrightarrow$	$AT\,\mathrm{sinc}^2(fT)$
3) *Esponenziale monolatero*	$A\,e^{-t/T}\mathrm{u}(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{AT}{1+j2\pi fT}$
	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha/T}\mathrm{u}(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{(\alpha+j2\pi f)^n}$
4) *Esponenziale bilatero*	$A\,e^{-\lvert t\rvert/T}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{2T}{1+(2\pi fT)^2}$
5) *Funzione sinc*	$A\,\mathrm{sinc}(2Bt)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{A}{2B}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$
6) *Impulso ideale*	$\delta(t)$	$\longleftrightarrow$	1
7) *Segnale costante*	A	$\longleftrightarrow$	$A\,\delta(f)$
8) *Gradino unitario*	$\mathrm{u}(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{j2\pi f}+\frac{1}{2}\delta(f)$
9) *Funzione signum*	$\mathrm{sign}(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{j\pi f}$
10) *Fasore*	$A\,e^{j2\pi f_0 t}$	$\longleftrightarrow$	$A\,\delta(f-f_0)$

11) *Segnale coseno* $A\cos(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{A}{2}\delta(f-f_0)+\frac{A}{2}\delta(f+f_0)$

12) *Segnale seno* $A\sin(2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \frac{A}{2j}\delta(f-f_0)-\frac{A}{2j}\delta(f+f_0)$

13) *Treno di impulsi* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT) \longleftrightarrow \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$

Trasformate notevoli (segnali tempo discreto)

1) *Impulso rettangolare* $A\,\mathcal{R}_N(n) \longleftrightarrow \frac{\sin(\pi\nu N)}{\sin(\pi\nu)}e^{-j(N-1)\pi\nu}$

2) *Impulso triangolare* $\mathcal{B}_{2N}(n) \longleftrightarrow \frac{\sin^2(\pi\nu N)}{N\sin^2(\pi\nu)}e^{-j2\pi N\nu}$

3) *Esponenziale monolatero* $a^n \mathrm{u}(n) \longleftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j2\pi\nu}}$

4) *Esponenziale bilatero* $a^{|n|} \longleftrightarrow \frac{1-a^2}{1-2a\cos(2\pi\nu)+a^2}$

5) *Funzione sinc* $2\nu_c\,\mathrm{sinc}(2\nu_c n) \longleftrightarrow \mathrm{rep}_1\left[\mathrm{rect}\left(\frac{\nu}{2\nu_c}\right)\right]$

6) *Funzione sinc²* $2\nu_c\,\mathrm{sinc}^2(2\nu_c n) \longleftrightarrow \mathrm{rep}_1\left[\Lambda\left(\frac{\nu}{2\nu_c}\right)\right]$

7) *Impulso ideale* $\delta(n) \longleftrightarrow 1$

8) *Segnale costante* $A \longleftrightarrow A\,\widetilde{\delta}(\nu)$

8) *Gradino unitario* $\mathrm{u}(n) \longleftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j2\pi\nu}}+\frac{1}{2}\widetilde{\delta}(\nu)$

9) *Funzione signum* $\mathrm{sign}(n) \longleftrightarrow \frac{2}{1-e^{-j2\pi\nu}}$

10) *Fasore* $A\,e^{j2\pi\nu_0 n} \longleftrightarrow A\,\widetilde{\delta}(\nu-\nu_0)$

11) *Segnale coseno* $A\cos(2\pi\nu_0 n) \longleftrightarrow \frac{A}{2}\widetilde{\delta}(\nu-\nu_0)+\frac{A}{2}\widetilde{\delta}(\nu+\nu_0)$

12) *Segnale seno* $A\sin(2\pi\nu_0 n) \longleftrightarrow \frac{A}{2j}\widetilde{\delta}(\nu-\nu_0)-\frac{A}{2j}\widetilde{\delta}(\nu+\nu_0)$

13) *Treno di impulsi* $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(n-kN) \longleftrightarrow \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\nu-\frac{k}{N}\right)$

Densità spettrale per segnali di potenza aperiodici (1) e periodici (2) e segnali di energia (3)

(1) $S_x(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|X_T(f)|^2$ (2) $S_x(f)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|X_k|^2\delta\left(f-\frac{k}{T_0}\right)$ (3) $S_x(f)=|X(f)|^2$

Teoria() Estratto.pdf

Parte IV

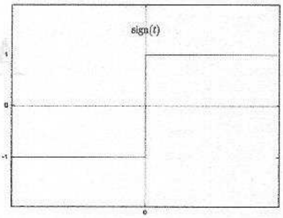
Appendici

Appendice A

Segnali determinati

A.1 Segno

$$s(t) = \text{sign}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ +1 & t > 0 \end{cases}$$



Il segnale sign(t) è un segnale di potenza.

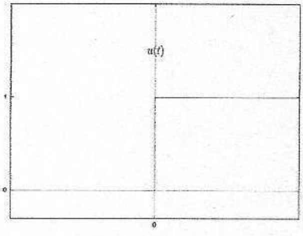
$$P_s = 0$$

La trasformata di *Fourier* del segnale è:

$$\text{sign}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\pi f}$$

A.2 Gradino unitario

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sign}(t)$$



Il gradino unitario è un segnale di potenza.

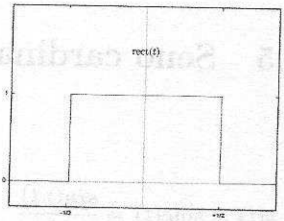
$$P_u = \frac{1}{2}$$

La trasformata di *Fourier* è:

$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

A.3 Rettangolo

$$s(t) = \mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$



Il segnale rettangolare è un segnale di energia e risulta:

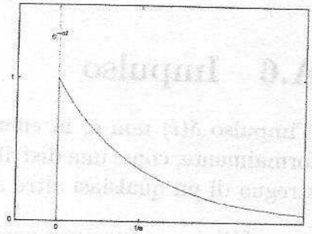
$$E_s = 1$$

La trasformata di *Fourier* è:

$$rect(t) \longleftrightarrow \mathrm{sinc}(f)$$ $A\, rect_{\Delta}(t) \leftrightarrow A\Delta\, \mathrm{sinc}(\pi\Delta f)$

A.4 Esponenziale decrescente

$$s(t) = e^{-at}\, u(t) = \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



Il segnale esponenziale è un segnale di energia:

$$E_s = \frac{1}{2a}$$

La sua area è:

$$A = \frac{1}{a}$$

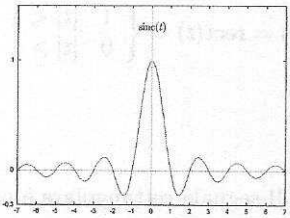
La sua trasformata di *Fourier* è:

$$s(t) \longleftrightarrow \frac{1}{a + j2\pi f}$$

Viene spesso utilizzato anche il segnale pari $s(t) = e^{-a|t|}$, anch'esso un segnale di energia ($E_s = \frac{1}{a}$) con trasformata di *Fourier* pari a $S(f) = \dfrac{2a}{a^2 + j4\pi f^2}$.

A.5 Seno cardinale

$$s(t) = \text{sinc}(t) = \frac{sin(\pi t)}{\pi t}$$



Il segnale sinc(t) è un segnale di energia e risulta:

$$E_s = 1$$

La trasformata di *Fourier* del seno cardinale è:

$$\text{sinc}(t) \longleftrightarrow \text{rect}(f)$$

A.6 Impulso

L'impulso $\delta(t)$ non è, in effetti, una funzione vera e propria ma è definita, formalmente, come una distribuzione, però esso può essere trattato alla stessa stregua di un qualsiasi altro segnale, ricordando le seguenti proprietà:

- $\delta(t)$ è una funzione pari
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t)\,dt = 1$
- $s(t) \cdot \delta(t - t_0) = s(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$

- $s(t) \star \delta(t - t_0) = s(t - t_0)$

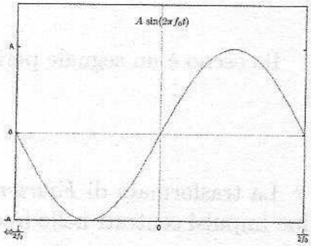
La trasformata di *Fourier* dell'impulso unitario è:

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

...semplicemente una costante.

A.7 Seno

$s(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$



Il seno è un segnale periodico, quindi è un segnale di potenza e risulta:

$$P_s = \frac{A^2}{2}$$

La trasformata di *Fourier* è quindi formata da impulsi, in particolare da due impulsi centrati nelle frequenze $-f_0$ e f_0:

$$S(f) = \frac{1}{2}j[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$

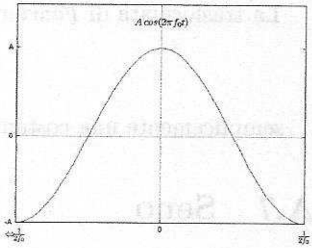
Quindi i coefficienti della serie di *Fourier* esponenziale sono tutti nulli tranne che:

$$S_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$S_{+1} = \frac{1}{2}$$

A.8 Coseno

$s(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$



Il coseno è un segnale periodico, quindi è un segnale di potenza e risulta:

$$P_s = \frac{A^2}{2}$$

La trasformata di *Fourier* è quindi formata da impulsi, in particolare da due impulsi centrati nelle frequenze $-f_0$ e f_0:

$$S(f) = \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

Quindi i coefficienti della serie di *Fourier* esponenziale sono tutti nulli tranne che:

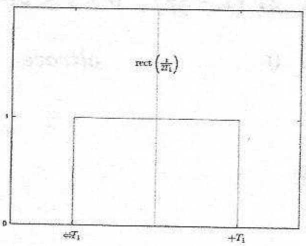
$$S_{-1} = \frac{1}{2}$$

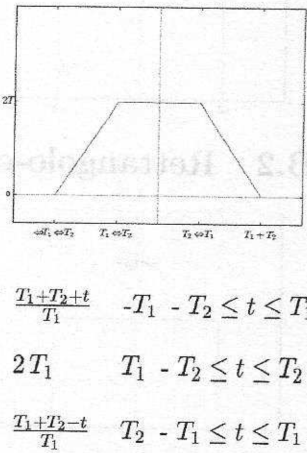
$$S_{+1} = \frac{1}{2}$$

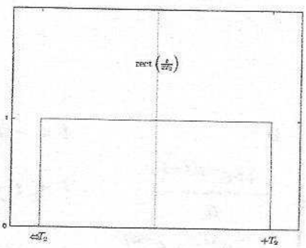
Appendice B

Convoluzioni importanti

B.1 Rettangolo-rettangolo

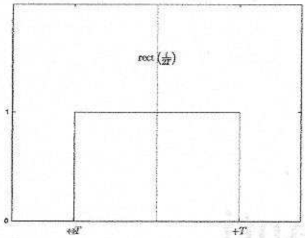


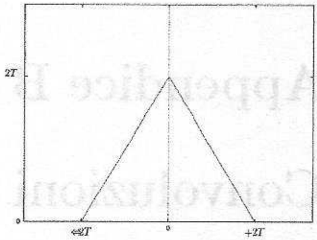


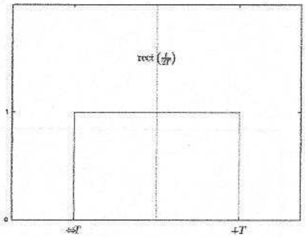


$$\begin{cases} \frac{T_1+T_2+t}{T_1} & -T_1 - T_2 \leq t \leq T_1 - T_2 \\ 2T_1 & T_1 - T_2 \leq t \leq T_2 - T_1 \\ \frac{T_1+T_2-t}{T_1} & T_2 - T_1 \leq t \leq T_1 + T_2 \\ 0 & \mathit{altrove} \end{cases}$$

B.1.1 Due rettangoli uguali

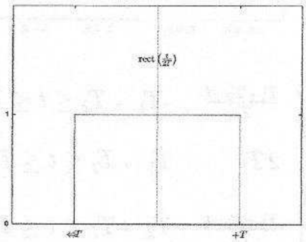


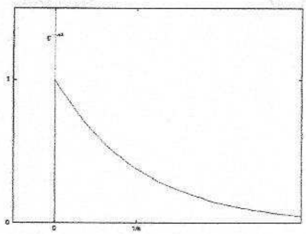




$$\begin{cases} 2T\left(1+\frac{t}{2T}\right) & -2T \le t \le 0 \\ 2T\left(1-\frac{t}{2T}\right) & 0 \le t \le 2T \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

B.2 Rettangolo-esponenziale





$$\begin{cases} 0 & t < -T \\ \dfrac{1 \Leftrightarrow e^{-a(t+T)}}{a} & -T \le t \le T \\ e^{-at}\dfrac{e^{aT} - e^{-aT}}{a} & t > T \end{cases}$$

RICHIAMO NUMERI IMMAGINARI e COMPLESSI

Si definisce il prodotto fra un numero $b \in \mathbb{R}$ e l'unità immaginaria j, tale per cui $j^2 = -1$, numero immaginario bj

Si definisce numero complesso il numero $a + bj$, con $a, b \in \mathbb{R}$

$a + bj$ è la forma algebrica

$r(\cos\varphi + j \sin\varphi)$ è la forma trigonometrica

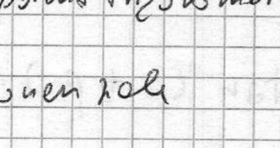
$r e^{j\varphi}$ è la forma esponenziale

$a - bj$ è il coniugato di $a + bj$

NORMA DEL NUMERO COMPLESSO $a^2 + b^2$

MODULO DEL NUMERO COMPLESSO $|\cdot| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

ARGOMENTO φ DEL NUMERO COMPLESSO (FASE) $\varphi = \arctan \frac{b}{a}$



RELAZIONI NOTEVOLI

$a = r \cos\varphi$

$b = r \sin\varphi$

$\cos\varphi + j \sin\varphi = e^{j\varphi}$ relazioni di Eulero

$\cos\varphi - j \sin\varphi = e^{-j\varphi}$

Due complessi sono uguali se i moduli sono uguali e $\varphi = \varphi' + 2\pi k$

FORMULE DI EULERO

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}$$

FORMULE DI DUPLICAZIONE

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

$$e^{-jx} = \cos x - j \sin x$$

, in quanto $\cos(-x) = \cos(x)$ e $\sin(-x) = -\sin(x)$

coseno funz. pari e seno funz. dispari

INTEGRAZIONI PER PARTI

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx$$

Esempio

$$\int_0^1 x e^x \, dx$$

la primitiva di $g'(x)$

poniamo $g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$

e $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = \underline{1}$

Abbiamo

$$\int_0^1 x e^x \, dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x \, dx =$$

$$= x e^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = e - e + 1 = \underline{1}$$